* श्रीः *

म० म० पण्डितप्रवरश्रीसुधाकरद्विवेदिविरचितं

प्रतिभाबोधकम् ।

टीकाकारः

पण्डितश्रीगङ्गाधरमिश्रः ।

प्रकाशकः

मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स,

संस्कृत बुकडिपो,

कचौड़ीगली, बनारस सिटी ।



*। श्रीः *

प्रतिभाबोधकम् ।

म० म० पण्डितप्रवरश्रीसुधाकरद्विवेदिविरचितम् ।

बालानन्दसंस्कृतविद्यालयज्यौतिषशास्त्राध्यापक—
ज्यौतिषाचार्यपण्डितश्रीगङ्गाधरमिश्रमैथिल-
कृतादर्शतलसंज्ञतिलकेनालङ्कृतम् ।

—०—

[विहारोत्कलसमित्याचार्यपरीक्षापाठ्यपुस्तकं
काशिकराजकीयाचार्यपरीक्षापाठ्यपुस्तकञ्च]

—०—

तच्च
टीकाकर्त्तुराज्ञया स्वद्रव्यव्ययेन
मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स
संस्कृत बुकडिपो,
कचौड़ीगली, बनारस सिटी
इत्येतैः प्रकाशितम् ।

—०—

अस्य पुनर्मुद्रणाधिकारस्तिलककृता स्वायत्तीकृतः ।

सन् १९४२ ई०] [मूल्य[illegible]काः

मुद्रकः—
श्रीमन्नालाल अभिमन्यु एम० ए०,
मास्टर प्रिंटिङ्ग वर्क्स,
बुलानाला,
बनारस सिटी।



लघ्वपि पुस्तकमेतद् गूढविचारात्मकत्वेन ।
बहुषूपपत्तिसिद्धेः प्रयोजकत्वेन चासदृशम् ॥१॥
मान्यं भाभ्रमविज्ञैरध्ययनीयं कुशाग्रतीक्ष्णधिया ।
प्राचीनं, प्राचीनैरुक्तत्वाद्भास्करादिभिर्गोले ॥२॥
नो चेत्कथं तदुक्तं "भाभ्रमणं नो भवेद्वृत्ते" ।
विद्वन्मल्लैर्लल्लैः श्रीपतिभिस्त्यक्तमप्यादौ ॥३॥
सङ्गच्छतेऽथ पाट्यां सूचीक्षेत्रस्य फलसिद्धेः ।
सन्दर्शनान्नवीनं, न भ्रमितव्यं, परन्तु पूर्वस्मिन् ॥४॥
समये, रेखागणिताप्रचारतो दुग्धलीनघृतम् ।
यद्वत्तथैव सकला परिभाषा गुप्तरूपाऽऽसीत् ॥५॥
सम्प्रति कलाप्रवीणैर्विकाशिता स्वल्पधीविनोदाय ।
क्वैतद्गम्यं विद्भिस्तीक्ष्णधिया,क्वास्मि मन्दोऽहम् ॥६॥
क्षन्तव्यं मम धाष्ट्र्यं शान्तस्वान्तैः परं विज्ञैः ।
सप्रणतीदं याचे तनयो बुधहंसराजमिश्रस्य ॥७॥
चयनपुराभिनिवासी **गङ्गाधरमिश्रमैथिलो** विद्वान् ।

अथ सतिलकप्रतिभाबोधकस्य विषयानुक्रमः।

आदाविदं छेद्यकसंज्ञयाऽऽसीत् सिद्धान्तकैः सप्तभिरन्वितं वित् !
ततश्च पश्चात्प्रतिभावबोधनाम्नोदितं गूढविचारपूर्णम् ॥

॥ श्रीः ॥

प्रतिभाबोधकम्

नमामि रामं रमणीयरूपमकारि जीवाकृतिरत्र येन ।
अनेकरूपैकपरं प्रसादात्तस्य ब्रुवे भूतलवृत्तरूपम् ॥१॥

नत्वा नुतां सुरगणैः, करुणार्द्रचित्तां भक्ताभिलाषपरिपूरणकामधेनुम् ।
ध्यात्वा गुरोर्मतिदमङ्घ्रिसरोजयुग्ममादर्शनामतिलकः क्रियते मनोज्ञः ॥

नमामीति । येन जीवाकृतिः, जीवानां प्राणिनामाकृतिर्वा जीवायाः शिवधनुर्ज्यायाः कृतिश्छेदनमकारि; जनकपुरे धनुर्यज्ञोत्सवावसर इति शेषः । अनेन सुरासुरभूनरेशादिभिरचालितस्यापि धनुषो भङ्गादलौकिकं कर्म सूचितम् । तथा च अनेकेषु रूपेषु नानावतारेषु एकः परः प्रधानो यस्तमेवं रमणीयरूपं मनोहरवेषवन्तं रामं नमामि । ततस्तस्य प्रसादात् भूतलवृत्तरूपं कस्मिँश्चिद् भूतले कस्यचित् वृत्तरूपस्य परिणामनेन रूपमाकारं ब्रुवे वच्मि ॥१॥

वृत्ताधारा छेदिता भूतलाभ्यां
सूची लम्बे ये भवेतां त्रिबाहौ ।
तस्मिन् शीर्षाद् द्वौ भुजौ यस्य सूच्याः
आधारस्य व्यासरूपस्तृतीयः ॥२॥
या स्याद्रेखा योगरूपा तयोः सा
तस्मिन् त्र्यस्रक्ष्मातले लम्बरूपा ।
स्पष्टा विद्वन् ! वासनाऽस्यावबोध्या
रेखाजातक्षेत्रमित्येव नूनम् ॥३॥

यस्य त्रिभुजस्य, सूच्याः शीर्षादाधारवृत्तपरिध्यवधि द्वौ भुजौ, सूचीकर्णारूपावित्यर्थः । तथा तस्या आधारस्याधारवृत्तस्य व्यासरूपस्तृतीयो भुजस्तस्मिन् त्रिबाहौ त्रिभुजभूतलोपरि, ये लम्बरूपे भूतले भवेतां, ताभ्यां भूतलाभ्यां वृत्ताधारा सूची छेदिताऽस्तीति शेषः । तयोर्भूतलयोर्योगरेखा तस्मिन् त्रिभुजधरातले लम्बरूपा भवेत् । हे विद्वन् ! अस्य वासना युक्तिः रेखाजातक्षेत्रमित्या ११।१९ स्पष्टा एवावबोध्येति । अत्र तावदादौ मदुक्तं सूचीलक्षणम् ।

"क्षेत्रप्रान्तादन्यभूमीतलस्थं विन्दुं विद्वन् ! यानि सूत्राणि तेऽत्र ।
सूचीकर्णास्तैर्भवेद्यद् घनाख्यं क्षेत्रं, सूचीक्षेत्रसंज्ञं किलोह्यम् ॥"

ततस्तद्भेदाः—

"आधारभेदाद् बहुधा मता सा सूची, तु तत्रापि वृतिस्थिता या ।
प्रयोजनीया भवतीह गोले सिद्धान्तकन्थाग्रथनार्थकानाम् ॥"

सा हि द्विविधा, एका समाऽन्या विषमेति । यस्यां शीर्षबिन्दुतः आधारवृत्तभूतलोपरि कृतो लम्बस्तदाधारवृत्तकेन्द्रे एव निपतति, तत्र तल्लम्बरूपकोटेः सर्वनिष्ठत्वात् तद्वृत्तव्यासार्धरूपभुजस्य समत्वात्तयोर्वर्गयोगमूलमितः कर्णः शीर्षादाधारवृत्तावधिकः सर्वत्र समान एवातः कर्णानां समत्वात् सा समसूचीति निगद्यते ।

अथवा समसूचीलक्षणम्—

जात्यत्रिभुजे भुजं वा कोटिप्रमाणं स्थिरं कृत्वा तत्त्रिभुजक्षेत्रस्य परितो भ्रमणेन यदेकं घनक्षेत्रमुत्पद्यते तदेव समसूचीक्षेत्रं कथ्यते ।

अथ विषमसूचीलक्षणम्

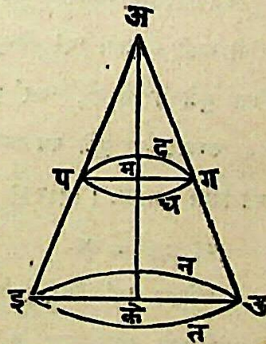
यस्यां शीर्षबिन्दुत आधारवृत्तभूतलोपरि कृतो लम्बस्तत्केन्द्रे न पतति सा विषमसूची । यतस्तत्र तल्लम्बमूलात्तद्वृत्तपरिधिप्रतिबिन्दून् गता रेखा न्यूनाधिका भुजरूपाः (३।७) कोटिस्तु सर्वत्र लम्बरूपैव, तेन स्थिरकोटिचलभुजवशेन सूचीकर्णाः न्यूनाधिकाः ।

अथ सूचीशीर्षादाधारवृत्तकेन्द्रगतं सूत्रं मध्यसूत्रसंज्ञकं ज्ञेयं विज्ञैः । तत्र

समायामाधारवृत्तव्यासस्तत्प्रान्तगतौ द्वौ सूचीकर्णौ, एवं सकलानि त्रिभुजानि तुल्यलक्षणलक्षितानि। विषमायां नैवम्। तत्र तु कर्णानां भिन्नत्वान्नैकलक्षणात्मकानि।

किन्तु तदाधारवृत्तकेन्द्रतस्तल्लम्बमूलगतं सूत्रमुभयतो वर्धितं तद्व्यासरूपमेको भुजः तत्प्रान्तलग्नौ कर्णौ द्वाविति त्रिभुजभूतलं शीर्षगतमाधारभूतलोपरि लम्बरूपं तत्केन्द्रगतमपि तेनास्य स्थिरत्रिभुजमिति नाम। अत्र हि केन्द्रगतव्यासशकलतल्लम्बयोर्वर्गयोगपदमितः कर्णः परमाधिकः। अकेन्द्रगतव्यासखण्डतल्लम्बवर्गयोगपदरूपः परमाल्पः। तथा च स्थिरत्रिभुजभूतलोपरि लम्बरूपा आधारवृत्तभूतलगताः पूर्णज्या भवेयुस्तत्प्रान्तद्वयलग्नौ द्वौ द्वौ सूचीकर्णौ समानौ।

अथाधारसमानान्तरभूतलच्छिन्नसूचीक्षेत्रप्रदेशस्य वृत्तत्वमेव।



यथा इनउत = आधारवृत्तम्।

इउ = तद्व्यासः। के = तत्केन्द्रम्।

अइ, अउ सूचीकर्णौ। अके = मध्यसूत्रम्।

पदगध = आधारसमानान्तरभूतलम्।

पग = समानान्तरभूतलस्य अइउ त्रिभुजभूतलस्य च योगरेखा।

अम = मध्यसूत्रोर्ध्वखण्डम्।

अत्र युक्तिः।

पग, इउ रेखे समान्तरे (११ अ, १७ क्षे०)

अतः षष्ठाध्यायोक्तदिशा $\frac{\text{अम}}{\text{अके}} = \frac{\text{पम}}{\text{इके}}$

$$\therefore \frac{\text{अम} \times \text{इके}}{\text{अके}} = \text{पम}, \quad \text{पम} = \frac{\text{पग}}{२}$$

एवं परितः 'पम' मानस्य स्थिरत्वात् 'म' केन्द्रतः 'पम' त्रिज्यया 'पदगध' भूतले कृतं वृत्तं प्रत्येकच्छिन्नबिन्दुं यास्यत्येवातस्तच्छिन्नप्रदेशस्य वृत्तत्वमिति॥

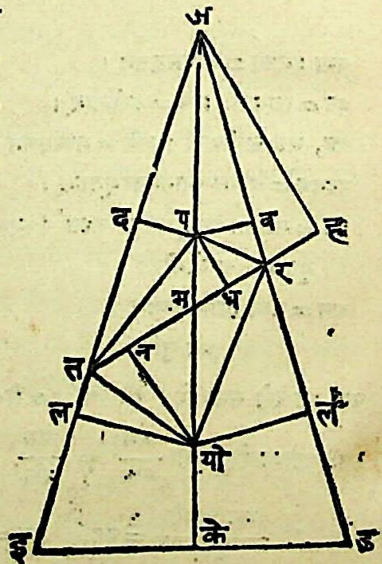
अथ समा सूची यदि आधारवृत्तस्यासमानान्तरभूतलेन छिद्यते तदा तच्छेदनप्रदेशस्य दीर्घवृत्तत्वं भवति ।

यथा अइउ = समसूची । अइ = अउ = सूचीकर्णः । अके = मध्यसूत्रम् । इउ = आधारवृत्तव्यासः । तह = आधारासमानान्तरधरातलस्य 'अइउ' त्रिभुजस्य च योगरेखा । असमानान्तरभूतले 'अ' शीर्षबिन्दुतः कृतो लम्बः = अह, असमानान्तरभूतलच्छिन्नमध्यसूत्रबिन्दुः = म,

अथ अतर त्रिभुजे 'अतर' कोणार्धकारिणी तप रेखा, एवं 'अरत' कोणार्धकारिणी 'रप' रेखा, अनयोर्योगस्तु 'अ' शीर्षकोणार्धकारिण्यां 'अके' रेखायामेव भवति । यतः त्रिभुजे शीर्षकोणार्धकारिण्यामेव भूसंलग्नान्तःकोणार्धकारिण्योर्वा भूसंलग्नबहिःकोणार्धकारिण्यो रेखयोर्योगो भवति । ततः 'प' बिन्दुतः 'अत' भुजे पद लम्बः, 'अर' भुजे पव लम्बः, तर भुजे पध लम्बः, एते मिथः समानाः । (१।२६)

पद = पव = पध

अतोऽत्र 'प' केन्द्रात् 'पद' त्रिज्ययोत्पन्नो गोलः द, व, ध, बिन्दुगतः स्यादथ च सूच्याः अन्तःस्पर्शकरस्तदसमानान्तरभूतलस्पर्शकरश्च भवेत् । अयं लघुः ॥



एवमुक्तयुक्त्या 'इतर' कोणार्धकारिणी 'तयो' रेखा, 'उरत' कोणार्धकारिणी 'रयो' रेखा, अनयोरपि योगः 'यो' बिन्दावेव । ततो भुजत्रयोपरि कृताः योल,

योन, योल लम्बाः समानाः । तेनात्रापि 'यो' केन्द्रात् 'योल' त्रिज्ययोत्पादितो गोलः सूच्यन्तःस्पर्शकरस्तदसमानान्तरभूतलस्पर्शकरश्च स्यात् । अयं महान् ॥

अथ तदसमानान्तरभूतलं तत्समसूचीकर्णेषु यत्र यत्र लग्नं तत्तद्बिन्दुबद्धसूत्राकृतिक्षेत्रस्य निर्णये कर्त्तव्ये यस्य कस्यचित् कर्णस्य तद्धरातलच्छिन्नबिन्दुतः 'प' बिन्दुगता रेखा कर्णः । तच्छिन्नबिन्दुतस्तत्कर्णस्पृष्टलघुगोलबिन्दुं यावत् तस्मिन्नेव कर्णे कोटिः । स्पर्शबिन्दुतः 'प' लघुगोलकेन्द्रगता तद्गोलव्यासार्धमिता भुजरूपिणी । अथ तच्छिन्नबिन्दुतः 'ध' बिन्दुगता रेखा कोटिः । 'पध' तद्गोलव्यासार्धं भुजः । छिन्नबिन्दु-गोलकेन्द्रगता रेखा कर्णः ।

अत्र कर्णस्योभयनिष्ठत्वाद् भुजयोस्तुल्यत्वात् कोटी समाने सिद्धयतः ।

अथ तत एव छिन्नबिन्दुतः 'यो' बिन्दुगता रेखा कर्णः । छिन्नबिन्दुतः 'न' बिन्दुगता रेखा कोटिः । योन भुजः एवं छिन्नबिन्दुतो बृहद्गोलस्पृष्टतत्सूचीकर्णबिन्दुं यावत् कोटिः । स्पर्शबिन्दुतस्तद्गोलकेन्द्रगता रेखा गोलव्यासार्धमिता, भुजः । छिन्नबिन्दु-बृहद्गोलकेन्द्रबद्धरेखा कर्णः । अत्रापि त्रिभुजयोः कर्णभुजसाम्यात् कोटी समे भवतः ।

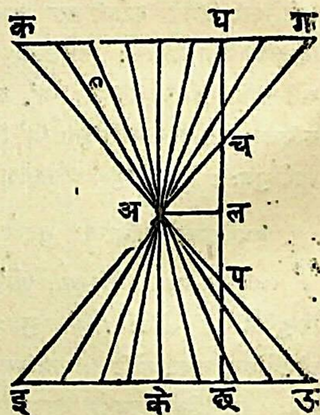
ततः पूर्वदर्शितकोटी, परदर्शितकोटिभ्यां तथा क्रमेण योजिते यथैकस्मिन् पक्षे कोटियोगेन सूचीकर्णरेखायां गोलद्वयान्तर्गतखण्डमानं भवेत् । तच्च स्थिरं वेद्यम् ॥

अथ तच्छिन्नक्षेत्रमध्ये 'तर' बृहद्व्यासे कल्पिते न, ध, बिन्दू नाभिरूपे च कल्पिते तदा कस्माच्चिच्छिन्नबिन्दुतः न, ध, बिन्दुगतरेखयोर्योगस्य गोलद्वयान्तर्गतकर्णखण्डसमस्य स्थिरत्वात् "नाभिगते ये रेखे परिधिस्थाद्बिन्दुतस्तयोर्योगः ॥ भवति सदा स्थिर एवमस्मिन् क्षेत्रे विचित्रं तत् ॥" इति दीर्घवृत्तलक्षणेन तत्क्षेत्रस्य दीर्घवृत्तत्वं (Ellips) सिद्धमिति ॥

यदसमानान्तरभूतलं, समसूच्याः कतिपयसूचीकर्णान् छित्वा ततः शीर्षाभिमुखवर्धितसूचीकर्णजनितायां विरुद्धसूच्यां सूचीकर्णान् छिनत्ति, तत्र चेन्मध्यसूत्रोपरि

लम्बभूतभूतले तदसमानान्तरभूतलं लम्बरूपं भवेत्तदा छेदनक्षेत्रस्यातिपरवलयत्वं, लम्बरूपाभावे तु तच्छिन्नप्रदेशाकारयोरतुल्यत्वाद्वस्तुतोऽतिपरवलयलक्ष्म न घटते। तेन तद्विषमातिपरवलयं ज्ञेयम्।

अत्र अइउ समसूची।
अकें = मध्यसूत्रम्,
तदुपरिलम्बभूतलं = अल
अक लम्बधरातले चचलपछ आधारस्यासमानान्तरभूतलं लम्बरूपमस्ति तत्र क्षेत्रमित्या छप विभागः; चप विभागश्च समान एव। तत्रातिपरवलयस्य व्यासः = चप, अवशिष्टं स्पष्टम्।

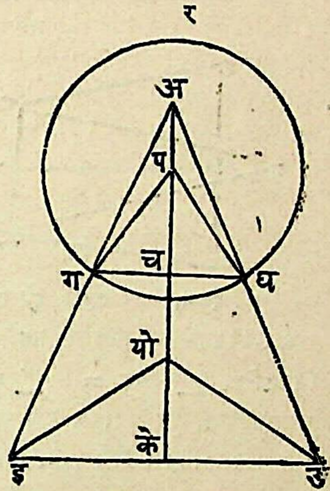


अस्योदाहरणन्तु—

कुच्छन्नचापोनपलांशमानावस्य कुज्याचापांशाः अधिकारस्तदहोरात्रवृत्तावयवस्य पृष्ठक्षितिजाधोऽपि गतत्वात्तत्र पृष्ठक्षितिजभूतलस्थशङ्क्वग्रं प्रति तदहोरात्रवृत्तप्रत्येकबिन्दुभ्यो गतैः सूत्रैर्यैका विषमसूची जाता तत्र शङ्क्वग्रगतक्षितिजवृत्तभूतलसमानान्तरधरातलोर्ध्वभागगततदहोरात्रवृत्तावयवतः शङ्क्वग्रगतानि सूत्राणि यानि तानि वर्धितानि सन्ति पृष्ठक्षितिजे लगन्त्यतस्तत्सूत्रच्छिन्नपृष्ठक्षितिजभूतलबिन्दवः शङ्कुमूलाद्याम्यदिशि भवन्ति। एवं पृष्ठक्षितिजाधोगततदहोरात्रवृत्तखण्डस्य प्रत्येकबिन्दुतः शङ्क्वग्रं गतानि सूत्राणि पृष्ठक्षितिजभूतलं छित्वैव गतानि, तेन तत्र तच्छिन्नबिन्दवस्तु शङ्कुमूलात् सौम्यदिश्येव गता भवन्ति, अत एकं वक्रं खण्डचापाकारं शङ्कुमूलादुदग्गतमपरं च याम्यगतं विरुद्धमुखं जिह्वामूलीयोपध्मानीयार्धविसर्गवद्भवति। एतदेवातिपरवलयरूपमवगन्तव्यम्।

अथ यदि समसूची गोलेन छिद्यते तत्र चेत्तन्मध्यसूत्रे एव गोलकेन्द्रं भवेत्तदैव छिन्नप्रदेशस्य वृत्तत्वमन्यथा वक्रत्वम्।

यथाऽत्र अइउ = समसूची, रगघ = गोलः। तत्केन्द्रम् = प। गप, घप रेखे कार्ये, गघ च कार्या।



अत्र युक्तिः।

∵ पग = पघ, तथा

∵ ∠गअप = ∠घअप

∴ त्रिकोणमितिगणितेन ∠गपच = ∠घपच। ततः गच = घच (१।४)

अतोऽत्र 'च' विन्दुकेन्द्रात् चग त्रिज्यया निर्मितं वृत्तं प्रत्येकच्छिन्नबिन्दुं गच्छत्येव, अत उपपन्नम्। यस्य गोलस्य केन्द्रं समसूचीमध्यसूत्रे न स्यात्तादृश-गोलेन समसूची यदि छिद्यते तदा छेदनप्रदेशस्य वक्रत्वम्।

अत एव समसूचीमध्यसूत्रेतरस्थलकेन्द्रवता गोलेन समसूची छिद्यते तदा तच्छेदनप्रदेशस्य वक्रत्वमेव सिद्ध्यति।

यथा सिद्धान्ततत्त्वविवेकीयबिम्बाधिकारे पृष्ठस्थदृष्टिवशात् स्वगोलस्थबिम्ब-गोलस्य यानि स्पर्शदृष्टिसूत्राणि भगोलपर्यन्तं वर्द्धितानि, तैश्छिन्नभगोलपृष्ठप्रदेशस्य वक्रत्वम्। अत्र बिम्बगोलाश्रितसमसूचीमध्यसूत्रस्य गोलकेन्द्रगतत्वाभावात्।

तत्र खमध्ये बिम्बगोलकेन्द्रे सति तत्सूच्या मध्यसूत्रस्य गोलकेन्द्रगतत्वाद्भ-गोलपरिणतबिम्बस्य वृत्तत्वमेव भवति।

यदि समसूची समसूच्या तथा छिद्यते यथा तयोर्मध्यसूत्रद्वयमेक-सूत्ररूपमेव भवेत्तदा तच्छेदनप्रदेशस्य वृत्तत्वं जायते।

अत्रोपपत्तिः।

इ त ग च अ क ड थ

यथा इउक, अतथ सूच्यौ, इमे तथा छिन्ने स्तो यथा तयोर्मध्यसूत्रे मिलित्वा अक रूपमेकसूत्रं जातमस्ति। तत्र अगक, अघक त्रिभुजयोः अक भुज उभयनिष्ठोऽस्ति, ∠ गअक = ∠ घअक, तथा ∠ घकअ = ∠ गकअ, समसूचीत्वात्, तेन (१।२६) युक्त्या ते त्रिभुजे सर्वावयवेन तुल्ये जाते।

अथ समसूच्योर्योगबिन्दुभ्यस्तन्मध्यसूत्रोपरि लम्बाः कार्याः। अत्र यथैकधरातले गच, घच, लम्बौ अक रेखायां जातौ, तत्र कगच, कघच त्रिभुजयोः (१।२६) युक्त्यैव सर्वथा समत्वं सिद्ध्यत्यर्थात् गच = चघ, एवं सर्वेषां लम्बानां समत्वादेकबिन्दुपतितत्वाच्च तल्लम्बमूलकेन्द्राल्लम्बव्यासार्धेन कृतं वृत्तं सूच्योश्छेदनप्रदेशगतं भवत्येव। इदं भिन्नदिग्गतशीर्षवशेनोक्तम्, तदेकदिग्गतशीर्षसंस्थावशेनापि एवमेव तद्वृत्तत्वं सिद्ध्यतीति।

विषमसूच्यां मध्यसूत्रस्य शीर्षसंलग्नघनकोणमध्यगतत्वाभावात्तन्मध्यसूत्रगतकेन्द्रवता गोलेन छिन्नाया विषमसूच्याः प्रदेशस्य नो वृत्तत्वम्। अत एव गोलकेन्द्रशीर्षा ग्रहगोलविमण्डलाधारिका या विषमसूची सा त्रिज्यागोलेन छिद्यते, तत्र तच्छेदनप्रदेशस्य वृत्तत्वं नैव भवति। अर्थात् त्रिज्यागोलपरिणतविमण्डलस्य वक्रत्वमेव।

अथ समसूच्युपरि गोलरचनाप्रकारः।

अत्रापि पूर्वक्षेत्रमवलोकनीयम्। तत्र अइउ = समसूची, अके = मध्यसूत्रम्। तथैकधरातलीयौ अइ, अउ कर्णौ। इउ = आधारव्यासः।

अत्र कल्प्यते ∠ अइके > ∠ इअके

तदा ∠ एअके = ∠ अइयो (१।२३)

अत्र युक्तिः ।

अइयो त्रिभुजे ∵ ∠अइयो = ∠इअयो ∴ इयो = योअ

परन्तु इयो = उयो (१।४)

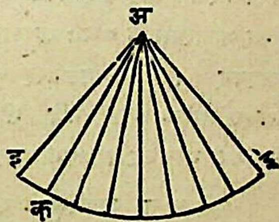
∴ इयो = उयो = योअ, तेन 'यो' बिन्दुं केन्द्रं मत्वा 'इयो' त्रिज्यया रचितो गोलः 'इ अ उ' सूच्युपरि गतो भवत्येव ॥

अत्र मध्यसञ्चात् सूचीकर्णोपरि लम्बसूत्रं यत्तत्त्रिज्यया निर्मितो गोलः सूच्यन्तःस्पर्शकरः स्यादिति ॥ अस्योपपत्तिः स्पष्टत्वादुपेक्षितेति ।

अथ समसूच्याः पृष्ठफलानयने ग्रन्थकर्तुरेव सूत्रम् ।

वेधाधोव्यासदलयोर्वर्गयोगात्पदेन वै ।
अधोवृत्तं हतं द्वाभ्यां भक्तं पृष्ठफलं भवेत् ॥

अत्रोपपत्तिः ।

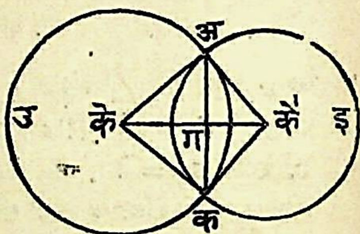


समसूचीं समभूतले निपात्य 'अ' शीर्षबिंदुं स्थिरीकृत्य तथा परितो भ्रामयेद्यथाऽऽधारवृत्तस्यैकं भ्रमणं भवेत् । अर्थात्पूर्वं समभूतलसूच्योः स्पर्शरेखा यथा 'अइ' आसीत्ततो भ्रमणानन्तरं पुनर्यदा सैव 'अइ' रूपेण भवेत् ।

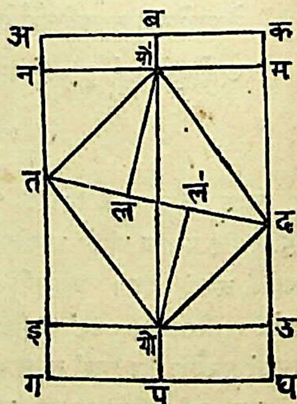
अत्र इइ' परिधिखण्डस्य रूपादप्यल्पः इक तुल्यो विभागः = $\frac{\text{परिखं}}{\text{न}}$, ततः अइक-

त्रिभुजफलम् = $\frac{\text{इक} \times \text{अक}}{२} = \frac{\text{प} \times \text{अक}}{\text{न} \times २}$

परन्त्वत्रैतन्मितानि 'न' मितानि त्रिभुजानि सन्ति, तेन संकलक्षेत्रफलम् = $\frac{\text{प} \times \text{अक} \times \text{न}}{\text{न} \times २ \times १} = \frac{\text{प} \times \text{अक}}{२}$, अत उपपन्नम् ।



यदि गोलो गोलेन छिद्यते तदा तच्छिन्नप्रदेशस्य वृत्तत्वम् । यथा उअक कश्चिद् गोलः, इअक अपरगोलेन छिद्यते तत्र केअकें, केककें त्रिभुजयोः (१।८) सर्वथा तुल्यत्वात् ∠अकेग = ∠ककेग ∴ केअग, केकगत्रिभुजयोः अग = गक, तेन 'ग' केन्द्रबिन्दुतः 'गअ' त्रिज्यया कृतं वृत्तं अ, क, बिन्दुगतं, (१।४) सकल च्छेदनबिन्दुगतं भवेदेवेति ।



अथ प्रसङ्गात् समतलमस्तकशङ्कुक्षेत्रव्यवस्थोच्यते ।

तत्र तदप्याधारभेदाद् बहुविधं, तत्र वृत्ताधारिके तस्मिन् यदि सर्वाः पार्श्वावरणरेखा आधारधरातले लम्बाः स्युस्तदा तत्समाख्यम् । अथवाऽऽधारवृत्तभूतलोपरि तद्वृत्तकेन्द्राल्लम्बरेखा यदि शीर्षपरिधिकेन्द्रगता भवेत्तथाऽपि तत्समाख्यम् ।

यदि च ता आधारभूतले नो लम्बरूपास्तदा विषमाख्यम् । वाऽऽधारभूतलोपरि तदाधारवृत्तकेन्द्रबिन्दुतो लम्बो यदि शीर्षवृत्तकेन्द्रे न याति तदाऽपि विषमाख्यम् । विषमसमे अपि आधारवृत्तसमानान्तरभूतलेन चेच्छिद्यते तर्हि छेदनप्रदेशस्य वृत्तत्वमेवेति स्फुटम् ।

यदि ते आधारसमानान्तरभूतलेन छिन्ने स्तस्तदा दीर्घवृत्तत्वं छेदनक्षेत्रस्य सिद्ध्यति । यथाऽत्रोपपत्तिः ।

वर्गक्षेत्रे वा विषमभुजसमकोणसमानान्तरचतुर्भुजक्षेत्रे भुजकोट्योरेकतरमवलम्

स्थिरं कृत्वा तत्सकलक्षेत्रस्य परितो भ्रमणेन यदेकं घनक्षेत्रं जायते तद्वृत्ताधारकं समसंज्ञकं समतलमस्तकं क्षेत्रमुच्यते ।

यत्र मस्तकवृत्तकेन्द्रात् तलवृत्तभूतलोपरिकृतो लम्बः तद्वृत्तकेन्द्रे न निपतति तद्विषमं समतलमस्तकं शंकुक्षेत्रं कथ्यते ।

इदमप्याधारभेदान्नानाविधं भवति, यथा चतुर्भुजाधारकं त्रिभुजाधारकं पञ्चभुजाधारकं वृत्ताधारकं दीर्घवृत्ताधारकमित्यादि ।

अत्र यथा

अकग = समतलमस्तकशङ्कुक्षेत्रम् ।

गघ = आधारवृत्तव्यासः = अक = मस्तकवृत्तव्यासः ।

प = आधारवृत्तकेन्द्रम् । ब = मुखवृत्तकेन्द्रम् ।

पब = मध्यसूत्रम्, तलल'द = असमानान्तरभूतलम् ।

अथात्र नतद, कोणार्धकारिणी तयो' रेखा, तदम कोणार्धकारिणी दयो' रेखा, तयोर्योगः पबमध्यसूत्रे एकस्मिन्नेव यो' विन्दौ भवतीति स्फुटम् ।

ततः 'यो' विन्दुतः 'अग' रेखायां यो'न लम्बः, 'कघ' रेखायां यो'म लम्बः, 'तद' रेखायां यो'ल लम्बः, इमे समानाः (१।२६) तेन 'यो' केन्द्रात् 'यो'न त्रिज्ययोत्पादितो गोलस्तत्क्षेत्रस्पर्शकरोऽसमानान्तरभूतलस्पर्शकरश्च भवेत् ।

एवं गतद कोणार्धकारिणी तयो रेखा, घदत कोणार्धकारिणी दयो रेखा, अनयोर्योगः, पब मध्यसूत्रे एकस्मिन्नेव यो' विन्दौ भवतीति स्पष्टम् ।

ततः योइ, योउ, योल' लम्बा अपि समा एव । पूर्ववत् 'यो' केन्द्रविन्दुतो 'योइ' त्रिज्ययोत्पादितो गोलः पूर्वनिर्मितगोलसमस्तत्क्षेत्रस्पर्शकरस्तदसमानान्तरभूतलस्पर्शकरश्च भवेत् । गोलद्वयस्पृष्टपार्श्वावरणरेखाखण्डानि समानान्येव ।

ततोऽसमानान्तरभूतलच्छिन्नसूच्या दीर्घवृत्तत्वसाधकोपपत्तिवदत्रापि वासना सुबोधा, अत्रापि चेन्मध्यसूत्रगतमेव गोलकेन्द्रं भवेत् तदा गोलच्छिन्नैतत्प्रदेशस्य वृत्तत्वमेवेति सुगमम् ।

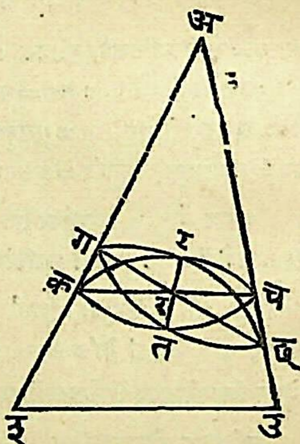
अथ विषमसूचीप्रकरणम् ।

तत्राधारसमानान्तरभूतलच्छिन्नविषमसूच्याः प्रदेशस्य वृत्तत्वं प्रागेव निदर्शितम् ।

अथाधारलग्नकोणैकान्तरकोणकारिणा स्थिरत्रिभुजभूतलोपरि लम्ब-रूपेण धरातलेन यदि विषमसूची छिद्यते तदा छेदनक्षेत्रस्य वृत्तत्वमेव ।

अत्र ग्रन्थकर्तुरुपपत्तिः ।

"यथा अइउ = सूची, अ = शिरः-स्थानम् । तथा तत्र अइउ त्रिभुजं, यस्य अइ, अउ द्वौ भुजौ, तृतीयो भुजः आधार-वृत्तस्य व्यासेन इउ संज्ञकेन समः ।



अथ अइउ सूची, गटछत, कटचत धरातलाभ्यां छेदिता, ये अइउ धरातले लम्बरूपे, कटचत धरातलं आधारधरात-लस्य समानान्तरं तदा तयोर्योगरेखा तरट, अइउ धरातले लम्बो भविष्यति (११ अ. १९ क्षे.) तरट रेखा अइउ धरातले, र बिन्दुगता कल्प्या तदा ∠ तरक = ∠ टरच = ∠ स, ∴ गछ एकैव सरला, तथैव कच अपि एकैव सरलरेखा । कटचत छेदन-रूपं च वृत्तमेव यतस्तद्धरातलमाधारधरातलसमानान्तरं तेन कर × रच = रट², अथ यदि गटछत छेदनरूपं च वृत्तं स्यात्तदा पूर्ववत् गर × रछ = रट² (रेखा. ३ अ. ३४)

कर × रच = गर × रछ, आभ्यां $\frac{\text{कर}}{\text{गर}} = \frac{\text{रछ}}{\text{रच}}$, अथ ∠ गरक = ∠ चरछ,

ततः षष्ठाध्यायेन रेखागणितस्य, गरक, छरच त्रिभुजं च मिथः सजातीयं, तेन ∠ चछर = ∠ गकर, परन्तु इउ, कच रेखे मिथः समानान्तरे ततः ∠ अइइ = ∠ अछग," एतेन

आधारवृत्तस्य दलं करोति यद्धरातलं शीर्षगतं च सूच्याः ।
तदेव खण्डं त्रिभुजाकृतं चेल्लम्बो भवेत्तत्र धरातले च ॥४॥
तत्राधारे कोणमाने समाने यर्हि स्तः स्वक्ष्मातलत्र्यस्रयोगात् ।
नूत्नाधारे कोणमाने नवीनें ये स्तस्ताभ्यां छेदनं तर्हि वृत्तम् ॥५॥
ते कोणमाने समदिग्गते वा विभिन्नदिक्स्थे भवतः समाने ।
सदा विदा छेदनजातरूपं वेद्यं तु नूतं वलयानुकारम् ॥६॥

इत्यादि सिद्ध्यति ।"

अत्र साध्यमेवादौ सिद्धं मत्वा तत इतिकर्त्तव्यता साधिता, सा न बहूभ्यो गणकेभ्यो रोचतेऽतो हावीभौआड़ग्रामनिवासिभिः पूज्यचरणैर्गुरुवरपण्डितश्रीगेनालाल-चातुर्धरिकैरन्यथोपपत्तिर्यतिता, सा चोच्यते ॥ द्रष्टव्यं पूर्वक्षेत्रम् ।

तत्रादौ अइउ स्थिरत्रिभुजस्य 'अइउ' आधारलग्नकोणतुल्यः 'अइ' कर्णरेखायां कुत्रापि 'अगछ' कोणः कार्यः तदा $\angle$अछग $= \angle$अइउ, परन्तु आधारसमा-नान्तरभूतलं कटचत कृतं तेन $\angle$अकच $= \angle$अइउ $\therefore \angle$अछग $= \angle$अकच, ततः गकर, चछर त्रिभुजयोः $\angle$गरक $= \angle$छरक (१।१५) तथा $\angle$गकर $= \angle$चछर कोणौ मिथः समानौ, तेन $\frac{\text{कर}}{\text{गर}} = \frac{\text{रच}}{\text{रछ}}$ (६ अ० २ क्षे०)

$\therefore$ कर $\times$ रच $=$ रछ $\times$ रग, परन्तु 'कटचत' छेदनक्षेत्रस्य वृत्तत्वात् ।

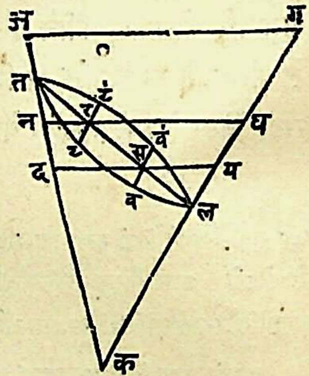
कर $\times$ रच $=$ रट^{2}, (३।३४) कच रेखायां टत लम्बरूपत्वात् ।

$\therefore$ रछ $\times$ रग $=$ रट^{2}, अत्र गछ रेखायाः प्रतिबिन्दुतः स्थिरत्रिभुजभूतलोपरि लम्बरेखा यास्तामियंदेकं भूतलं तस्य कटचत भूतलस्य च योगरेखा $=$ तट, तेन ग, ट, छ, त बिन्दुचतुष्टयगतमेव वृत्तं तल्लम्बभूतलच्छेदनजनितमिति सर्वमुपपन्नम् ।

अथ यद्धरातलं स्थिरत्रिभुजभूतले केवलं लम्बरूपमेव, नैकान्तर-

कोणतुल्यकोणकारि, नाधारसमानान्तरं; तादृशेन धरातलेन यदि विषम-सूची छिद्यते तदा छेदनक्षेत्रस्य दीर्घवृत्तत्वं सिद्ध्यति ।

यथोच्यते—



अत्र कअग = विषमसूच्याः स्थिरत्रिभुजम् ।
अग = आधारवृत्तव्यासार्धम् ।
अक = परमाल्पसूचीकर्णः ।
कग = परमाधिकसूचीकर्णः ।
अथ येनासमानान्तरभूतलेन सूची छिन्ना तस्य 'कअग' त्रिभुजस्य च योगरेखा = तल, तच्छेदनप्रदेशश्च = तट'व'लवट,

तत्र 'तल' रेखायाः 'र' बिन्दौ समानं भागद्वयं विधायाधारसमानान्तरभूतलं कार्यं, यस्य 'कअग' त्रिभुजस्य च योगरेखा = नघ, एवं 'तल' रेखायां क्वापि 'स' बिन्दौ आधारसमानान्तरभूतलं कार्यं, तत्र तत्त्रिभुजभूतलयोर्योगरेखा=दय ।
ट'ट = तट'लट धरातलस्य 'नघ' समानान्तरभूतलस्य च योगरेखा ।
व'व = तट'लट भूतलस्य दय समानान्तरभूतलस्य च योगरेखा ।

अत्रोपपत्तिः ।

'तरन' त्रिभुजे $नर = \frac{तर \times ज्या\angle नतर}{ज्या\angle तनर}$

एवं 'लरघ' त्रिभुजे $रघ = \frac{रल \times ज्या\angle रलघ}{ज्या\angle रघल}$

$\therefore\ नर \times रघ = रट'^{२} = \frac{तर \times रल \times ज्या\angle नतर \times ज्या\angle रलघ}{ज्या\angle तनर \times ज्या\angle रघल} =$

$= \frac{तर \times रल \times गुण}{हर}$ ... ... (क)

अथ 'तसद' त्रिभुजे, $\text{दस} = \frac{\text{तस} \times \text{ज्या}\angle\text{नतर}}{\text{ज्या}\angle\text{तदस}}$

एवं 'लसय' त्रिभुजे, $\text{सय} = \frac{\text{सल} \times \text{ज्या}\angle\text{सलय}}{\text{ज्या}\angle\text{सयल}}$

$$\therefore \quad \text{दस} \times \text{सय} = \frac{\text{तस} \times \text{सल} \times \text{ज्या}\angle\text{नतर} \times \text{ज्या}\angle\text{सलय}}{\text{ज्या}\angle\text{सयल} \times \text{ज्या}\angle\text{तदस}}$$

$$= \text{सव}' \times \text{व}'\text{स} = \text{व}'\text{स}^2 = \frac{\text{तस} \times \text{सल} \times \text{गुण}}{\text{हर}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{ख})$$

$$\frac{(\text{क})}{(\text{ख})} = \frac{\text{रट}'^2}{\text{व}'\text{स}^2} = \frac{\text{तर} \times \text{रल} \times \text{गुण} \times \text{हार}}{\text{तस} \times \text{सल} \times \text{गुण} \times \text{हार}} = \frac{\text{तर} \times \text{कर}}{\text{तस} \times \text{सल}} = \frac{\text{तर}^2}{\text{तस} \times \text{सल}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{रट}'^2 \times \text{तस} \times \text{सल}}{\text{व}'\text{स}^2} = \text{तर}^2 \quad \therefore \quad \text{तस}\cdot\text{सल} = \frac{\text{तर}^2 \times \text{व}'\text{स}^2}{\text{रट}'^2}$$

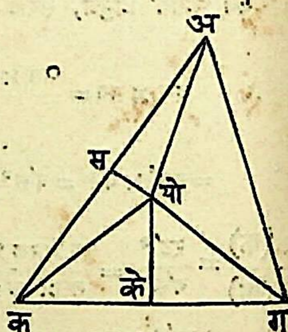
$\therefore \sqrt{\text{तस} \times \text{सल}} = \frac{\text{तर} \times \text{वस}}{\text{रट}}$ अत्र 'तस × सल' अयं 'तस + सल' अस्य योगार्धस्य 'तर' मितस्य व्यासार्धस्य वृत्ते 'तल' रेखायां 'स' बिन्दुतः कृतस्य लम्बरूपपूर्णज्यादलस्य मानेन समानः । यद्यत्र तल = बृ॰व्या ट'ट = ल॰व्या, कल्प्यते तदा "लघुव्यासार्धजे वृत्ते" इत्यादिना दीर्घवृत्तत्वं स्फुटमिति सर्वमुपपन्नम् ॥

अस्योदाहरणं तु शंकुकुच्छत्रयोगचापोनपलांशमानाचस्य ग्रहस्य द्युज्याचापांशा न्यूनास्तदहोरात्रवृत्तस्य शंक्वग्रात्परिधिप्रत्येकबिन्दुगतैः सूत्रैर्येका विषमा सूची जायते, तत्र तस्याः सूचीकर्णानां शीर्षाभिमुखवर्धनेन यत्र यत्र पृष्ठक्षितिजधरातले लग्नास्तत्तद्बिन्दुवद्धसूत्रस्य तद्ग्रहभाभ्रमणमार्गस्य दीर्घवृत्तत्वं सिद्ध्यति ।

तत्राहोरात्रवृत्तरूपतत्सूच्याधारधरातलस्यासमानान्तरेण पृष्ठक्षितिजधरातलेन छिन्नायास्तद्विषमसूच्याः स्थिरत्रिभुजभूनलरूपकयाम्योत्तरधरातलस्याधारधरातले केवललम्बरूपत्वात । न ह्येकान्तरकोणकर्तृकत्वादिति ।

अस्य प्रयोजनं तु वास्तवदृश्यवृत्तभूतलपरिणतवास्तवशुक्लवृत्ताकारनिर्णयावसरे शृङ्गोन्नतौ भवति।

अथ विषमसूच्युपरि गोलरचनाप्रकारः ।



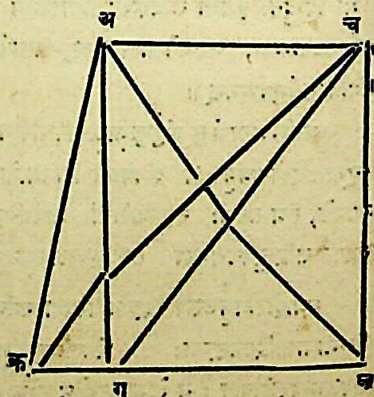
अत्र 'अकग' विषमसूची, कग= आधारवृत्तव्यासः । के=आधारवृत्तकेन्द्रम् ।

अथ 'के' विन्दुतः कग आधारधरातलोपरि लम्बरूपिणी 'केयो' रेखा कार्या(११।१२) अथ कस्यापि 'अक' सूचीकर्णस्य 'स' विन्दौ समानं भागद्वयं विधाय तत एव तद्रेखायां 'सयो' लम्बधरातलं कार्यम् । लम्बरेखालम्बधरातलयोर्योगः=यो विन्दौ,

तदा ककेयो, गकेयो त्रिभुजयोः कयो=योग (१।४) एवं असयो, कसयो त्रिभुजयोः अयो=कयो (१।४) ∴ कयो=अयो=गयो,

तेन 'यो' विन्दुकेन्द्रात् 'गयो' त्रिज्यया निर्मितो गोलः आधारवृत्तपरिधिगतो-विषमसूचीशीर्षगतश्च भवेदित्युपपन्नम् ।

अथ विषमसूचीपृष्ठफलानयनम् ।



यथाऽत्र 'कचघ' विषमसूच्यस्ति तत्र तदाधारवृत्तकेन्द्रम्= ग, अथ कगघ आधारवृत्तधरातलोपरि 'ग' विन्दुतः 'गअ' लम्बो निष्काश्यः । तथा 'च' विषमसूचीशीर्षविन्दावाधरवृत्तसमानान्तरभूतलं विधेयम् । तत्र स निष्काशितलम्बो यत्र लग्नस्तत्र 'अ' विन्दुः ततस्तद्विषमसूच्याधार-

वृत्तपरिधिगतप्रत्येकविन्दुतः 'अ' विन्दुगतैः सूत्रैरेका समसूची जाता = कअघ । एवमत्र एकस्मिन् आधारवृत्तपरिधौ समलम्बके विषमसमसूच्यौ जाते ।

अथ 'अग' लम्बस्य प्रतिविन्दुगतान्याधारसमानान्तरभूतलानि विधेयानि, तैर्भूतलैश्छिन्नयोः समविषमसूच्योः प्रदेशानां वृत्तत्वात् तत्र तत्तद्धरातलच्छिन्नसूचीद्वयप्रदेशवृत्तयोः समत्वात् समसूचीछेदकवृत्तफलयोगस्य विषमसूचीछेदकवृत्तफलयोगसमत्वात् समविषमसूच्योर्घनफलसाम्यं स्फुटम् ।

अथ निर्दिष्टसमसूच्यन्तर्गतस्तादृशो गोलश्चिकीर्षितोऽस्ति यस्य व्यासदलं निर्दिष्टरेखासममेव भवेत् ।

अत्रोपपत्तिः ।

तत्र सूचीकर्णद्वयमाधारवृत्तव्यास इति त्रिभुजे सूचीशीर्षस्थाने तत्सूचीकर्णयोरेकतरस्य कस्यचिदुपरि लम्बरेखां कृत्वा तस्यां निर्दिष्टरेखातुल्यं छित्वा तच्छिन्नविन्दुतो मध्यसूत्रस्य समान्तरा रेखा कार्या; यत्र सा तत्सूचीकर्णे लगति तद्बिन्दुतस्तत्सूचीकर्णोपरि या लम्बरूपा रेखा भवेत् सा वर्धिता सती यत्र मध्यसूत्रे लगति, तदेव बिन्दुं केन्द्रं परिकल्प्य तल्लम्बरेखाव्यासार्द्धेन यो गोलः, स एव निर्दिष्टरेखाव्यासार्धोत्पन्नगोलः स्यात् । निर्दिष्टरेखाया लम्बरेखातुल्यत्वात् (१।३४) । इति ॥

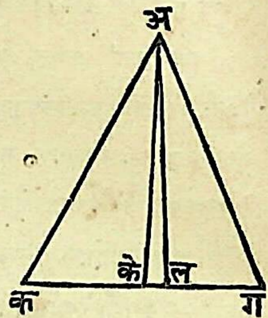
अथ विषमसूच्युपरिगतगोलरचनाविधिनाऽऽकाशस्थबिन्दुचतुष्टयगतगोलरचना सिद्ध्यति ।

यथा, विन्दुत्रयगतं वृत्तं कृत्वा तत्पालिबिन्दुतः । चतुर्थबिन्दुगैः सूत्रैः सूच्यैकाऽजनि तत्र च ॥ ऊर्ध्वस्थगोलरचनायुक्त्या स्पष्टैव वासना ॥

व्यभिचारश्च । यदैकभूतले ते स्युस्तद्गते चतुरस्रके । संमुखास्रयुतिश्चेन्नो भार्धांशप्रमिता भवेत् । तदा खिलोद्दिष्टमिदं वेद्यं क्षेत्रार्थकोविदैः ॥

अथ विषमसूच्यामपि व्यासाग्रगतकर्णयोर्वर्गयोगः स्थिराङ्को भवति।

यथा



अकग विषमसूची, कग = आधारवृत्तव्यासः ।

के = आधारवृत्तकेन्द्रम् । अक, अग, एकधरातलीयौ कर्णौ ।

अके = मध्यसूत्रम् = म, अल = आधारव्यासोपरिलम्बः ।

अत्र ∵ कके = केग

ततः अकल त्रिभुजे, अक^2 = अल^2 + कल^2

तथा अलग त्रिभुजे अग^2 = अल^2 + लग^2

परन्तु ∵ $\begin{cases} \text{कल = कके + केल} \\ \text{लग = केग − केल = कके − केल} \end{cases}$

∴ अक^2 = अल^2 + (कके + केल)^2

अग^2 = अल^2 + (कके − केल)^2

∴ अक^2 + अग^2 = अल^2 + कके^{2} + केल^2 + २कके × केल + अल^2 + कके^{2} + केल^2 − २कके × केल = २अल^2 + २कके^{2} + २केल^2 = २(अल^2 + कके^{2} + केल^2) = २(कके^{2} + अके^{2})

अनेन "व्यासाग्रगतयोः श्रुत्योर्वर्गयोगः कयोरपि ।
असमायामपि भवेत्सूच्यां स्थिरमितिः किल ॥ इत्युपपन्नम् ।

एवं व्यासाग्रगतयोस्तुल्यश्रुत्योर्घातः पराधिकः ।
परमाल्पाधिकश्रुत्योः परमाल्पो मतो बुधैः ॥"

अत्रोपपत्तिः ।

तत्रादौ स्थिरत्रिभुजभूतलीयकर्णयोरन्तरं परमाधिकं, कर्णयोः परमाल्पाधिकत्वात् । तस्मादिष्टस्थानीयव्यासाग्रगतकर्णान्तरमल्पमिति प्रसिद्धम् । ततोऽप्यल्पतरं व्यासाग्रगततुल्यकर्णान्तरं शून्यसमम् । तेन

$$\text{पआ} - \text{पअ} > \text{इक} - \text{इक}' > \text{क} - \text{क}$$

$$\therefore\ \text{पआ} - \text{पअ} > \text{क} - \text{क}$$

$$\therefore\ \text{पआ}^{2} + \text{पअ}^{2} - 2\,\text{पआ} \times \text{पअ} > \text{क}^{2} + \text{क}^{2} - 2\,\text{क}\cdot\text{क}$$

$$\text{अत्र } \because\ \text{पआ}^{2} + \text{पअ}^{2} = \text{क}^{2} + \text{क}^{2}$$

$$\therefore\ -2\,\text{पआ} \times \text{पअ} > -2\,\text{क} \times \text{क}$$

$$\therefore\ \text{क} \times \text{क} > \text{पआ} \times \text{पअ},$$ अत उपपन्नम् ॥

अथान्यत्सूत्रम्—व्यासाग्रगतकर्णाभ्यां समाभ्यां योऽल्पको भवेत् ।
सर्वाधिकः, स्यात्सर्वाल्पः परात्पश्रुतिजो हि यः ॥

आधारव्यास इष्टकर्णद्वयमिति त्रिभुजे त्रिकोणमित्या शीर्षकोणकोटिज्यामानम् $= \dfrac{\text{क}^{2} + \text{क}'^{2} - \text{आव्या}^{2}}{2\text{क} \times \text{क}'} =$ कोज्याशीको, अत्र भाज्यस्य स्थिरत्वात् यत्र 'क × क' अस्य मानमत्यल्पं तत्रैव लब्धेः परमत्वमतस्तत्र तत्कोणकोटेरधिकत्वात् कोणमितिरत्यल्पा । यत्र च 'क-क' अस्य मानमत्यधिकं तत्र तत्कोणकोटेरत्यल्पत्वात् तत्कोणमानमत्यधिकं तत्तु पूर्वसूत्रेण स्फुटमिति सर्वमुपपन्नम् ।

अथ विषमसूच्यन्तःस्पर्शकरो गोलस्तु, शीर्षस्थाने व्यासाग्रगतसूचीकर्णोत्पन्नकोणानां विषमत्वात् नहि भवितुमर्हति, अर्थात् सकलशीर्षकोणार्धकारिणी रेखा, एका नैवेति ।

अथ लाम्बिकदार्ष्टिकभेदाभ्यां परिणामनं द्विधा भवति । तत्राद्यापेक्षयाऽपरः परमप्रयोजनीयः । यथा छायाभ्रमणे शृङ्गोन्नतौ ग्रहणे च सकलदृश्यपदार्थपरिणामनेऽपि । प्रथमस्यापि यथा शंकुभ्रमणमार्गनिरूपणे उपयोगः ।

तत्र दार्ष्टिकपरिणामनं तु दृष्टिसूत्रोपरि लम्बभूतले भवति, तत्रैव स्पष्टतया दृश्यत्वात् । यथा दर्पणादावपि प्रतिबिम्बग्राहके वस्तुनि तावद्वदनं नावलोक्यते यावद् दृष्टिसूत्रोपरि दर्पणादिभूतलं लम्बरूपं न भवेत्तेन वक्ष्यमाणपरिणामने परिणामकवृत्तस्य पृष्ठकेन्द्रमेव दृष्टिस्थानमङ्गीकृतम् ॥

तत्र यत् वृत्तादिक्षेत्रं परिणाम्यते तत्परिणाम्यम्। यस्मिन् भूतले परिणाम्यते तत्परिणामकमिति ध्येयं सुधीभिः।

तथा परिणामकवृत्तभूतले परिणाम्यक्षेत्रप्रान्तस्पृष्टदृष्टिसूत्राणि यत्र यत्र लग्नानि तत्तद्बिन्दुवद्धसूत्राकृतिरेव तत्प्रतिभोच्यते।

लाम्बिकं तु कस्मिँश्चिद्भूतले तदन्यभूतलस्थवृत्तादिक्षेत्रप्रान्तेभ्यो या लम्बरेखास्तन्मूलवद्धसूत्राकृतिरेव परिणततत्क्षेत्ररूपं ज्ञेयम्।

तत्र चेत्परिणाम्यक्षेत्रभूतलं परिणामकभूतले लम्बरूपं तदा लाम्बिकपरिणामनेन परिणततत्क्षेत्रस्याकृती रेखारूपैव।

चेत्ते भूतले तुल्यान्तरे स्तस्तदा परिणाम्यक्षेत्रतुल्यमेव परिणतक्षेत्रं भवति।

अथ चेत्परिणाम्यवृत्तक्षेत्रभूतलं परिणामकवृत्तभूतलस्यासमानान्तरमपि भवन् न तेन छिन्नं तदा परिणतस्याकृतिर्दीर्घवृत्तानुकारा भवति। यथोच्यते—

कल्प्यते, यथाऽक्षांशाल्पद्युज्याव्यासार्धसिद्धमहोरात्रवृत्तम् = परिणाम्यम्।

क्षितिजवृत्तभूतलम् = परिणामकम्।

अत्राहोरात्रवृत्तपरिधिप्रतिबिन्दुतः क्षितिजभूतले लम्बा विधेयाः। तत्र सर्वाल्पलम्बाग्रात्सर्वाधिकलम्बोपरि कृतो लम्बो भुजः। सर्वाल्पसर्वाधिकलम्बयोरन्तरं, कोटिः। अहोरात्रवृत्तव्यासः कर्णः। अत्र त्रिकोणमित्या क्षितिजाहोरात्रवृत्तभूतलयोरुत्पन्नकोणकोटिज्या $= \frac{\text{त्रि} \times \text{लं}}{\text{अ-व्या}}$।

अथाहोरात्रवृत्तपरिधेः कस्मिन्नपि बिन्दौ याम्योत्तरवृत्तभूतलसमानान्तरभूतलं कार्यम्। तद्गतलम्बाग्रबद्धसूत्रं कर्णः = लंअ-व। पूर्ववल्लम्बान्तरं कोटिः। लम्बमूलान्तरं भुजः। अत्र भुजमानम् $= \frac{\text{धरातलोत्पन्नाङ्ककोटिज्या} \times \text{लं-अ-व}}{\text{त्रि}} =$

उत्थापनेन भुजः $= \frac{\text{त्रि} \times \text{लं} \times \text{लंअव}}{\text{त्रि} \times \text{अन्या}} = \frac{\text{लं} \times \text{लंअव}}{\text{अन्या}} = \frac{\text{लं} \times \frac{\text{लंअव}}{२}}{\text{द्यु}} = \frac{\text{लं} \times \text{लंअव}}{२\text{द्यु}}$

अत्र चेत् २द्यु = बृहद्व्यासः । लं = लघुव्यासस्तदा "बृहद्व्यासार्धजे वृत्ते" इत्यादिना तत्परिणतस्य दीर्घवृत्तत्वं स्फुटमिति ।

अथैवं गोलोपरि कस्मिँश्चिन्महद्वृत्तभूतले कस्यचिन्महद्वृत्तस्य परिधिस्थितप्रत्येकबिन्दुतो ये लम्बा भवेयुस्तन्मूलबद्धसूत्राकृतिर्दीर्घवृत्ताकारा भवतीति तावदुदाहृत्य विविच्यते—

यथा कल्प्यते क्षितिजवृत्तधरातले नाडीवृत्तपरिधिस्थितप्रत्येकबिन्दुभ्यो लम्बरेखाः कृताः । अत्र परिणामकवृत्तं क्षितिजम् । परिणाम्यवृत्तं तु नाडीवृत्तम् । एतयोः पृष्ठीयकेन्द्रप्रोतवृत्तभूतले ऽर्थाद्याम्योत्तरभूतले एव विषमसूचीस्थिरत्रिभुजवत् परमाधिकलम्बरेखा भवति । यथा निरक्षखमध्यात् क्षितिजोपरि लम्बो लम्बज्यातुल्यः सर्वाधिकः । तत्र क्षितिजोर्ध्वनाडीवृत्तार्धभागप्रदेशात्कृता लम्बा अधोमुखाः । क्षितिजाधोभागगतनाडीवृत्तस्थबिन्दुभ्यो विहिता लम्बा ऊर्ध्वमुखाः । तत्र पूर्वापरसूत्राद्दक्षिणभागे क्षितिजधरातले वप्रार्धरूपकं लम्बमूलबद्धसूत्रमेकम् । पूर्वापरसूत्रादुदग्गतंलम्बमूलबद्धसूत्ररूपं द्वितीयम् । एतद्वप्रार्धद्वयं मिलित्वैकं दीर्घवृत्तरूपं सिद्धं भविष्यति । तत्र पूर्वापरस्वस्तिकबद्धसूत्रं (पूर्वापरसूत्रं) बृहद्व्यासमानम्, ऊर्ध्वाधोभागगतपरमाधिकलम्बमूलबद्धसूत्रमर्थादत्र द्विगुणाक्षज्यारूपकं लघुव्यासमानं भविष्यति । अथ तावद्दीर्घवृत्तसाधनिका वासनोच्यते—

तत्र नाडीवृत्तक्षितिजभूतलोत्पन्नकोणो लम्बांशः, अतएव निरक्षखमध्यसंलग्नो लम्बज्यानिरक्षोर्ध्वाधरसूत्राभ्यामुत्पन्नकोणो धरातलोत्पन्नकोणकोटिः । तत्र लम्बज्याऽक्षज्यात्रिज्येति त्र्यवयवघटितत्रिभुजे कोणानुपातेन धरातलोत्पन्नकोणकोटिज्या $= \frac{\text{त्रि} \times \text{ज्याअ}}{\text{गोव्याद}}$, अथ निरक्षखमध्यात् पूर्वकपाले कुत्रापीष्टबिन्दुं विधाय

ततो निरक्षोर्ध्वाधरसूत्रोपरि कृतो लम्ब इष्टनतकालज्या, तत्र तत्कल्पितबिन्दुतः क्षितिजभूतले या लम्बरेखा, तन्मूलं यत्र पूर्वोक्तवप्रार्धे स्यात्तद्बिन्दुतः समसूत्रखण्डात्मकाक्षज्योपरि या लम्बरेखा सा तु इष्टनतकालज्या समैव, समानान्तरचतुर्भुजे संमुखभुजयोः समत्वात्। सा तु साध्यमाने दीर्घवृत्तक्षेत्रे भुजरूपा। अथ तत्कल्पितबिन्दुतः पूर्वापरसूत्रोपरि या लम्बरेखा, निरक्षोर्ध्वाधरसमान्तरा सा नतकालकोटिज्या एवं तल्लम्बरेखाया यत्र पूर्वापरसूत्रे मूलं, तद्बिन्दौ पूर्वापरसूत्रोपरि लम्बरूपिणी क्षितिजभूतले या रेखा साऽवश्यं कल्पितबिन्दुतः क्षितिजवृत्तभूतलोपरिकृतलम्बरेखामूलगता भविष्यत्येव (११।११)। अथवा तत्कल्पितबिन्दौ याम्योत्तरवृत्तभूतलसमानान्तरधरातले कृते तदुक्तक्षेत्रमुत्पद्यते। तत्र कल्पितबिन्दुगतलम्बः कोटिः, नतकालकोटिज्या कर्णः, क्षितिजधरातले तन्मूलबद्धरेखा भुजः। वस्तुतोऽयं भुजः साध्यमानदीर्घवृत्ते कोटिर्भविष्यतीति पुरस्तात् स्मर्तव्यम्। अत्रापि त्रिभुजे कर्णभुजयोरुत्पन्नकोणो लम्बांशमितः (११।१०)। अतएव कल्पितबिन्दुसंलग्नः कोटिकर्णोत्पन्नकोणो धरातलोत्पन्नकोणकोटिः। अत्र कोणानुपातेन

$$\text{भुजमानम्} = \frac{\text{सू} \times \text{कोज्याधउको}}{\text{त्रि}}\text{। उत्थापनेन भुजः} = \frac{\text{सू} \times \text{कोज्याधउको}}{\text{त्रि}} =$$

$$\frac{\text{सू} \times \text{त्रि} \times \text{ज्याअ}}{\text{त्रि} \times \text{गोव्याद}} = \frac{\text{सू} \times \text{ज्याअ}}{\text{गोव्याद}} = \frac{\sqrt{\text{त्रि}^{2} - \text{ज्या}^{2}\text{कन}} \times \text{ज्याअ}}{\text{गोव्याद}}\text{।}$$

अत्रोक्तदक्षिणभागगतवप्रार्धे कल्पितनतभुजकोटिज्या तु गोलव्यासदलवृत्ते भुजकोटिज्या, साऽक्षज्याव्यासार्धे परिणता साध्यमानदीर्घवृत्तक्षेत्रे कोटिर्दृश्यतेऽतो "बृहद्व्यासार्धजे वृत्ते भुजकोटिज्यका हि या। लघुव्यासे परिणता सैव कोटिमितिर्भवेत्॥" इति दीर्घवृत्तसाधकसिद्धान्तेन तल्लम्बमूलबद्धाकृतेर्दीर्घवृत्तत्वं सिद्धम्।

एवं क्षितिजवृत्तिभूतले पूर्वापरस्वस्तिकप्रोतवृत्तानां मध्ये पूर्वापरवृत्तमेकं विहाय सर्वेषां लाम्बिकपरिणामनेन यानि दीर्घवृत्तक्षेत्राणि भविष्यन्ति, तेषु बृहद्व्यासार्धं पूर्वापरसूत्ररूपमेव, लघुव्यासमानं चलं, परिणाम्यपरिणामकवृत्त पृष्ठकेन्द्रान्तरं कोटिरूपं तेन सर्वेषां तत्परिणतदीर्घवृत्तानां बृहद्व्यासाग्रयोरन्तःस्पर्शो-

भवति, लघुव्यासमानस्य चलत्वान्न सर्वाणि समानान्तराणि । एवं यदि दीर्घवृत्ते लघुव्यासमानमेव स्थिरं कल्पते, तदा बृहद्व्यासमितिरेव चला सिद्ध्यति यथा अ$\sqrt{१-इ^{२}}$ = क, अत्र 'अ' अस्य स्थिरत्वेऽपि $\sqrt{१-इ^{२}}$ अस्य रूपाल्पत्वेऽपि नैकरूपत्वात 'क' इदं चलम् । वा, अ = $\frac{क}{\sqrt{१-इ^{२}}}$, अत्र 'क' अस्य स्थिरत्वेऽपि हरस्य चलत्वात् 'अ' इदं नैकरूपकम् । एवमेव कस्यचिद्दीर्घवृत्तपरिधिसमानान्तरक्षेत्रे दीर्घवृत्तत्वं नहि सिद्ध्यति । परिणाम्यपरिणामकभूतलयोर्मिथो लम्बरूपत्वे लाम्बिकपरिणामनेन तत्प्रतिभा रेखारूपैव । यथाऽत्र क्षितिजधरातले पूर्वापरवृत्तस्य लाम्बिकी प्रतिभा सरलरेखा (पूर्वापररेखा) एवेति ॥

अथ गोलस्थवृत्तानां कस्यचिद्वृत्तस्य धरातलेऽन्येषां प्रतिभाज्ञानार्थं विधिः ।

निर्दिष्टवृत्तस्य धरातलं यद्-
यत्पृष्ठकेन्द्रं च तदेकमत्र ।
वेद्यं क्रमात्तद्गणकेन नित्य-
माधारसंज्ञं निजदृष्टिचिह्नम् ॥७॥
गोलोद्भवानामिह मण्डलानां
पालीर्गता या निजदृष्टिचिह्नात् ।
रेखाः प्रलम्बाः किल यत्र यत्र
स्वाधारके स्युः प्रतिभाश्च तेषाम् ॥८॥
यदाधारवृत्तस्य पृष्ठीयकेन्द्रं
स्वदृक्चिह्नभिन्नं तदेवात्र बोध्यम् ।

तदाधारवृत्तस्य पृष्ठीयकेन्द्रं
विधिं कुर्वता गोलविद्यावरेण ॥९॥

स्पष्टार्थाः श्लोकाः। अत्रोपपत्तिर्मूलकारस्य।

यथा, "गोलपृष्ठे किमपि अकग वृत्तं, तदीयपृष्ठकेन्द्रं = के, दृक्-चिह्नम् = दृ, आधारपृष्ठीयकेन्द्र-निर्दिष्टवृत्तपृष्ठीयकेन्द्रप्रोतमहद्वृत्तं = पृकगजदृटसंज्ञम्। जट रेखा = प्रोतवृत्ताधारवृत्तयोर्योगरेखा। म = गोलगर्भबिन्दुः। अथ दृक्चिह्नात् 'अकग' वृत्तपालिगतरेखाभिर्या सूची तत्र दृगक त्रिभुजं तत्प्रोतवृत्तधरा-तलगतम्; तेन त्रिभुजधरातले

अकग वृत्तस्य धरातलं लम्बरूपं, तथाऽऽधारवृत्तस्य धरातलं च तत्र लम्बरूपम्।

तद्योगरेखा = क′ग′ रेखा, तदा ∠दृकग = दृगज चापार्धसमम्। (रे ३ अ)

∠पृदृग = पृकगचापार्धसमम्। अस्य कोटिः = ∠दृग′क′, परन्तु पृकग चापार्धकोटिः दृजगचापार्धसमा, तेन ∠दृकग = ∠दृग′क′, अतस्तच्छेदनरूपं वृत्तमेव पूर्वसिद्धान्तेन, यत्र क′ग′ = व्यासः।

अथ मक′ = स्प$\frac{१}{२}$पृकचा। मग′ = स्प$\frac{१}{२}$पृगचा, वा

मक′ = स्प$\frac{१}{२}$ (पृकेचा − केकचा)

मग′ = स्प$\frac{१}{२}$ (पृकेचा + केगचा)

ततः क′ग′ = मग′ − मक′, एवं यदि दृक दृक्सूत्रं 'दृमपृ' सूत्रादधो याति, तदा तयोर्योगः प्रतिभाव्यासो ज्ञेयः।"

अस्मात्सूत्रावतारोऽयम् ।

अभीष्टाधारवृत्तीयपृष्ठकेन्द्रान्तरं हि यत् ।
द्विधेष्टवृत्तविष्कम्भदलोनसहितं ततः ॥१०॥

तयोः खण्डजे स्पर्शरेखे, तयोर्यद्–
भवेदन्तरं, व्यासमानं तदेव ।
यदा स्यादृणं चापमानं तदा तु
तयोर्योगमानं भवेद् व्यासमानम् ॥११॥

स्पष्टोऽर्थः ।

अत्रापि ग्रन्थकारस्य

"अत्र यथा विषुवद्वृत्तधरातले क्षितिजस्य प्रतिभाज्ञानमभीष्टं तदा तयोः पृष्ठीयकेन्द्रान्तरं = अक्षांशोननवतिः । क्षितिजस्य व्यासदलं नवतिस्ततो "द्विधेष्टवृत्तविष्कम्भदलोनसहितमि" त्यादिना

९० − अक्षां − ९० = − अक्षां = प्रथममृणगतं, तथा, ९० − अक्षां + ९० = १८० − अक्षां, आभ्यां 'यदा स्यादृणं चापमानमि'–त्यादिना व्यासः = स्प $\frac{1}{2}$ (१८० — अक्षा) + स्प $\frac{1}{2}$ अक्षां, आचार्येण (मलयेन्दुसूरिणा) चापार्धस्पर्शरेखारूपमेव द्युज्याखण्डं पूर्वं साधितं तेन व्यासदलम् =

$\frac{1}{2}$ (प्रद्यु + द्विद्यु), गोलगर्भात् प्रतिभायाः केन्द्रान्तरम् = व्यासदल — द्विद्यु = $\frac{1}{2}$ (प्रद्यु — द्विद्यु) एतेन "पलैर्विहीना गगनाष्टरूपा" इत्याद्युपपन्नं भवति (द्रष्टव्यं द्वादशवृत्तं यन्त्रराजे) ।"

ऋणचापमाने, वीजप्रक्रियया धनर्णयोर्योगं विधायोपपत्तिर्बोध्या । अथात्र यदि त्रिकोणमित्या स्पर्शरेखे विधाय योगः कार्यस्तदा

व्यासः = स्प (९० − $\frac{१}{२}$ अक्षां) + स्प $\frac{१}{२}$ अक्षांश । अक्षांश = अ

$$= \text{कोस्प}\,\tfrac{१}{२}\,\text{अक्षांश} + \text{स्प}\,\tfrac{१}{२}\,\text{अक्षांश} = \frac{\text{त्रि} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}}{\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}} \times \frac{\text{त्रि}\cdot\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}}{\text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}}$$

समच्छेदेन योगे कृते, $\text{व्या} = \dfrac{\text{त्रि} \times \text{कोज्या}^{२}\,\frac{१}{२}\text{अ} + \text{त्रि} \times \text{ज्या}^{२}\,\frac{१}{२}\text{अ}}{\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\,\text{अ} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\,\text{अ}}$

$$= \frac{\text{त्रि}\,(\text{कोज्या}^{२}\,\frac{१}{२}\,\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\,\frac{१}{२}\text{अ})}{\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}} = \frac{\text{त्रि}^{३}}{\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\,\text{अ}}$$

$$= \frac{२\ \text{त्रि}^{२}}{\dfrac{२\ \text{ज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}{\text{त्रि}}}$$

$$= \frac{२\ \text{त्रि}^{२}}{\text{ज्या अ}},\ \therefore\quad \text{व्यासदलम्} = \frac{\text{त्रि}^{२}}{\text{ज्या अ}} = \frac{\text{त्रि} \times \text{त्रि}}{\text{ज्या अ}} = \text{को छे अ ।}$$

अथैवं गोलकेन्द्रात्प्रतिभाकेन्द्रान्तरम् = कोछेअ − स्प $\frac{१}{२}$ अ = केअं

$$= \frac{\text{त्रि}^{२}}{\text{ज्या अ}} - \frac{\text{त्रि} \times \text{ज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}{\text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}$$

$$= \frac{\text{त्रि}^{२}}{\dfrac{२\ \text{ज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}}{\text{त्रि}}} - \frac{\text{त्रि} \times \text{ज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}{\text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}} =$$

$$= \frac{\text{त्रि}^{३}}{२\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}} - \frac{\text{त्रि}\cdot\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}{\text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}$$

समच्छेदेनान्तरे कृते, $\text{केअं} = \dfrac{\text{त्रि}^{३} - २\text{त्रि}\cdot\text{ज्या}^{२}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}{२\ \text{ज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ} \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}}$

$$= \frac{\text{त्रि}\,(\text{त्रि}^{२} - २\text{ज्या}^{२}\ \frac{१}{२}\ \text{अ})}{२\ \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ} \times \text{ज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}$$

$$= \text{त्रि}\ \frac{\left(\text{त्रि} - \dfrac{२\text{ज्या}^{२}\,\frac{१}{२}\text{अ}}{\text{त्रि}}\right)}{\dfrac{२\text{ज्या}\,\frac{१}{२}\text{अ}, \times \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\ \text{अ}}{\text{त्रि}}} = \frac{\text{त्रि}\ (\ \text{त्रि} - \text{उज्या अ}\ )}{\text{ज्या अ}} = \frac{\text{त्रिकोज्या अ}}{\text{ज्याअ}}$$

= कोस्प अ = स्पल, पृष्ठीयकेन्द्रान्तरस्य (लम्बांशमितस्य) स्पर्शरेखा । ∴ पूर्वसिद्धं व्यासदलं च = कोछेभ = छेलं, पृष्ठीयकेन्द्रान्तरस्य छेदनरेखा ।

अतः सूत्रम् ।

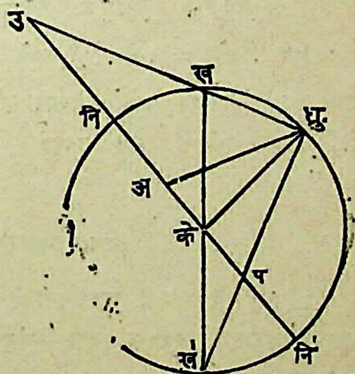
आधारस्वमहद्वृत्तपृष्ठकेन्द्रान्तरस्य ये ।
छेदनस्पर्शरेखे, ते त्रिज्याकेन्द्रान्तरे ध्रुवम् ॥ १२ ॥

अत्र परिणाम्यपरिणामकवृत्तयोर्यत्पृष्ठीयकेन्द्रप्रोतवृत्तं, तस्य परिणामकवृत्तस्य च या येागरेखा, तस्यां गोलकेन्द्रात् तत्पृष्ठकेन्द्रान्तरस्पर्शरेखान्तरे प्रतिभायाः केन्द्रम् । तथा तत्त्रिज्या च पृष्ठीयकेन्द्रान्तरच्छेदनरेखातुल्या भवतीति ।

अथाध्येतॄणां बुद्धिवृद्धये नाड़ीवृत्तभूतले पूर्वापरवृत्तपरिणामनं प्रदर्श्यते । तत्र गोलोपरि कस्मिंश्चिन्महद्वृत्तभूतले यस्य कस्यचिल्लघुनो महतश्च वृत्तस्य परिणामनं तु एकान्तरकोणकर्तृभूतलच्छिन्नविषमसूचीप्रदेशवृत्तत्वनिदर्शनमेवावगम्यं प्रतिभाविज्ञैः ।

अत्र प्रस्तुतमुच्यते—

दृष्टिस्थानम् = उत्तरध्रुवः = ध्रु ।
खकेख′ = पूर्वापरधरातलाकृतिः ।
निकेनि′ = नाड़ीवृत्तधरातलाकृतिः ।
निखध्रुनि′ = परिणाम्यपरिणाम-
कवृत्तपृष्ठकेन्द्रप्रोतवृत्तम् ।
= याम्योत्तरम् ।



अत्र ध्रुखख′ = पूर्वापरवृत्ताधारिका विषमसूची, सा च वर्धिता सती नाड़ीवृत्तभूतले लग्ना, तदा नाडीवृत्ते पूर्वापरवृत्तप्रतिभा = उप,

अथ पृष्ठीयकेन्द्रप्रोतभूतले एव स्थिरत्रिभुजस्थितैरेकान्तरकोणतुल्यत्वं चिन्त्यते—

तत्र ∵ खनिख′चा = १८०, ∴ खध्रुख′ = ९० (३।२१)

∴ ९० − केभुख′ = ∠केभुख

परन्तु ∵ भुकेउ = ९०, ∴ ९० − केभुख = ∠केउख, ∠केभुख′ = ∠केख′भु,

∴ ∠केउख = केख′भु, तथाच ∠उकेख = ∠ख′केप (१।१५)

∴ भुउप, भुख′ख त्रिभुजयोः उभयनिष्ठः = ∠उभुप,

तथा ∠भुउके = ∠भ ख′के ∴ ∠भुखख′ = ∠भुपउ

अतः प्रतिभाया वृत्तत्वं स्फुटमिति ।

अथ प्रतिभाया व्यासः = उप

तस्य 'अ' विन्दौ समानं खण्डद्वयं विहितं सत् प्रतिभायाः केन्द्रम्=अविन्दुः । अभु रेखा विधेया ।

तत्र ∵ ∠उभुप = ∠९०° । ∴ उअ = अप = अभु*

तथा ∠भुउअ = ∠उभुअ = लम्बांशार्धमिताः = लंद्ल,

∴ ∠उभुअ + ∠अउभु = केअभु = लम्बांशमिताः (१।३२)

अथ ∵ अकेभु = ९० ∴ ∠अभुके = अक्षांशाः ।

तत्र 'भु' केन्द्रात् 'भुके' त्रिज्यया कृते वृत्ते अके = स्प∠केभुअ, अभु = छे∠केभुअ = पृ·के·अं, अत उपपन्नं "छेदनस्पर्शरेखे ते त्रिज्याकेन्द्रान्तरे भुव,"—मिति ॥

अथ मूलकारस्य—

"(एवं यदि कस्यापि वृत्तस्य पृष्ठीयकेन्द्रम्, आधारपृष्ठकेन्द्रात् 'अ' तुल्यान्तरे कल्प्यते तद्व्यासदलं च = क, तदा पूर्वयुक्त्या प्रतिभाव्यासमानम् = प्रव्या = स्प$\frac{1}{2}$ (अ + क)−स्प$\frac{1}{2}$ (अ−क) =

---

*जात्यत्रिभुजे कर्णार्धतः समकोणपर्यन्तस्य कर्णार्धसमत्वात् ।

$$= \frac{\text{त्रि}\cdot\text{ज्या}\frac{१}{२}\,(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}\frac{१}{२}\,(\text{अ}+\text{क})} - \frac{\text{त्रि}\times\text{ज्या}\frac{१}{२}\,(\text{अ}-\text{क})}{\text{कोज्या}\frac{१}{२}\,(\text{अ}-\text{क})} ❀$$

❀ समच्छेदेनान्तरे कृते   प्र·भा·व्यास =

$$= \frac{\text{त्रि}\times\text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\cdot\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क}) - \text{त्रि}\times\text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})}$$

$$= \text{त्रि}\left(\frac{\text{त्रि}}{\text{त्रि}}\left\{\frac{\text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क}) - \text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})}\right\}\right.$$

$$= \frac{\text{त्रि}^{२}\left\{\frac{\text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})}{\text{त्रि}}\right\}}{\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\times\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})}$$

अत्र यदि 'अ + क', 'अ–क' इदृशे चापे स्वीकार्ये, तदा "चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये" इत्यादिना भाज्ये चापान्तरज्यामानं भवेत् तेन,

$$\text{प्र·भा·व्या} = \frac{\text{त्रि}^{२}\times\text{ज्याक}}{\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\cdot\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})}$$

$$= \frac{२\text{त्रि}\times\text{ज्याक}}{\frac{२\ \text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क})\cdot\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})}{\text{त्रि}}}$$

$$= \frac{२\text{त्रि}\times\text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ}+\text{कोज्याक}} \therefore \text{प्र·व्या·द} = \frac{\text{त्रि·ज्याक}}{\text{कोज्या अ}+\text{कोज्याक}} ❀$$

* अनयैव युक्त्या गोलकेन्द्रात्प्रतिभाकेन्द्रान्तरम् =

$$= \frac{\text{त्रि}}{२}\left\{\text{स्प}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क}) + \text{स्प}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})\right\} = \frac{\text{त्रि·ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}+\text{कोज्याक}}$$

अतः सूत्राणि—

आधारः स्वेप्सितो यः स्यात्तत्थेष्टवलयं निजम् ।
तत्पृष्ठसंज्ञविवरं ध्रुवसंज्ञं भवेदिह ॥१३॥

स्ववृत्तविष्कम्भदलोत्थकोटिज्यकान्विता सा ध्रुवकोटिजीवा ।
हारो भवेदत्र तथा त्रिजीवा गुणो महद्वृत्तभवा च कल्प्यः ॥१४॥
स्ववृत्तविष्कम्भदलस्य जीवा ध्रुवज्यका चात्र गुणेन गुण्या ।
हारेण भक्ता प्रतिभाभवे स्तो व्यासार्धकेन्द्रान्तरसञ्ज्ञके ते ॥१५॥

ग्रन्थकारः—

"अथैवं विषुवद्वृत्तधरातले क्रान्तिवृत्तस्य प्रतिभाज्ञानार्थं पूर्वोक्त्यैव तयोः हृ पृष्ठकेन्द्रान्तरं जिनांशसमं, तेन तत्प्रतिभाव्यासः =

$$=\frac{\text{कोज्याजि}\cdot\text{त्रि}}{\text{त्रि}-\text{ज्याजि}}-\frac{\text{कोज्याजि}\times\text{त्रि}}{\text{त्रि}+\text{ज्याजि}}$$

। तथा मकरवृत्तव्यासार्धम् $=\frac{\text{कोज्याजि}\times\text{त्रि}}{\text{त्रि}-\text{ज्याजि}}$

ततोऽनुपातो यदि मकरवृत्तव्यासार्धे त्रिंशदंशास्तदा क्रान्तिवृत्ते किं जातस्तत्स-जातीयो व्यासः $= ३० \left\{ १ + \frac{\text{त्रि}-\text{ज्याजि}}{\text{त्रि}\times\text{ज्याजि}} \right\}$

$$= ३० \left\{ १ + \frac{\text{उज्याजिको}}{\text{त्रि}+\text{ज्याजि}} \right\}$$

$$= ३० \left\{ १ + \frac{\text{उज्या जिको}}{\text{त्रि}+\text{ज्याजि}} \right\} \frac{\text{कोज्याजि}}{\text{कोज्याजि}} =$$

$$= ३० \left\{ \frac{\text{कोज्याजि}}{\text{कोज्याजि}} + \frac{\text{कोज्याजि}\times\text{उज्याजिको}}{\text{कोज्याजि}\,(\text{त्रि}+\text{ज्याजि})} \right.$$

$$= ३० \left\{ \frac{\text{कोज्याजि} + \dfrac{\text{कोज्याजि}\times\text{उज्याजिको}}{\text{त्रि}+\text{ज्याजि}}}{\text{कोज्याजि}} \right.$$

अतो यन्त्रराजान्तर्गतगणिताध्यायस्थ 'परापमानां नरभागमौर्वी' इत्याद्युपपन्नम् । अन्तरे कृते केन्द्रान्तरं चोपपन्नं भवति । एवं बहवः प्रकारा अनेन सिद्ध्यन्ति, किं लिखनविस्तरेण । एवं पूर्वोक्तयुक्त्यैव गोलस्पर्शरेखयोर्द्वयोर्योगेन यः कोणः, स एव तत्प्रतिभास्पर्शरेखयोरुत्पन्नकोणः । (क) तथा या रेखा गोलवृत्ते स्पर्शरेखा, तत्प्रतिभा च तत्प्रतिभावृत्ते स्पर्शरेखा । (ख) यद्व्यासमितिरनन्ता सा प्रतिभा सरलरेखैव ।"

अथ गोलस्पर्शरेखयोर्योगेन यः कोणः स एव तत्प्रतिभास्पर्शरेखयोरुत्पन्नकोण-इत्यत्रोपपत्तिः—

(क) अत्र यथा, कल्प्यते लपूनिर = नाडीवृत्तम् = परिणामकभूतलम् । तत्रोत्तरध्रुवस्थानरूपदृष्टिस्थानात् परिणामितसमवृत्तरूपं वृत्तात्मकम् = पुस्पवजपभ, एवं तस्मिन्नेव भूतले परिणतापमवृत्तरूपं वृत्तात्मकम् = लस्पनर, अत्रानयोर्योग-रूपात् 'स्प' बिन्दुतः तत्प्रतिभावृत्तयोः कृताभ्यां स्पअ, स्पक स्पर्शरेखाभ्यां जनितः अस्पक कोणः समवृत्तापमवृत्तसम्पातोत्पन्नकोणेन सम इति प्रदर्शनीयोऽस्ति । तत्र, के = गोलकेन्द्रम् ।

अत्र निनि′ = निरक्षोर्ध्वाधरसूत्रम् = वा, नाड़ीवृत्तभूतलपरिणतपूर्वापरवृत्तप्र-तिभामानसूत्रम् ।

तेन के′ = पूर्वापरवृत्तप्रतिभाकेन्द्रम् । केके′ = स्पअक्षांश, के′स्प = तत्प्रति-भात्रिज्या = छेअक्षांश (द्रष्टव्या आधाररवमहद्वृत्तेत्यादिपद्यटीका)

एवं, वद = नाड़ीवृत्तायनप्रोतवृत्तसम्पातबद्धसूत्रम् = वा, नाड़ीवृत्तभूतलपरि-णतापमवृत्तप्रतिभामानसूत्रम् ॥

तेन तत्प्रतिभकेन्द्रम् = च, केच = केन्द्रान्तरम् = स्पजि, चस्प=छेजि ।

∠ तकेथ = सन्धिग्रहनतकालांशाः । ∠ स्पकेत = सन्धिग्रहविषुवांश-कोट्यंशाः ।

तत्र स्पअ = समवृत्तप्रतिभास्पर्शरेखा,

स्पक = अपमवृत्तप्रतिभास्पर्शरेखा,

तेन ∠ अस्पके′ = ∠ कस्पच = ९०. उभयत्र ∠ कस्पके′ कोणशोधनेन ∠ भस्पक = ∠ चस्पके′,

अथ 'केस्पके′' त्रिभुजे ज्या ∠ केस्पके′ = $\dfrac{\text{ज्यान} \times \text{केके}'}{\text{स्पके}'} = \dfrac{\text{ज्यान} \times \text{स्पअ}}{\text{छेअ}}$

$= \dfrac{\text{ज्यान} \times \dfrac{\text{त्रि} \times \text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}}{\dfrac{\text{त्रि}^{२}}{\text{कोज्याअ}}} = \dfrac{\text{ज्यान} \times \text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}$ इयं त्वाक्षवलनज्यासमाऽतः ।

$\angle$केस्पके$'$ = आक्षवलनांशाः । एवं 'केस्पच' त्रिभुजे ज्या$\angle$केस्पच =

$$= \frac{\text{कोज्यावि} \times \text{केच}}{\text{स्पच}};$$

$$= \frac{\text{कोज्यावि} \times \text{स्पजि}}{\text{छेजि}} = \frac{\text{कोज्यावि} \times \left(\frac{\text{ज्याजि} \times \text{त्रि}}{\text{कोज्याजि}}\right)}{\frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्याजि}}}$$

$$= \frac{\text{कोज्यावि} \times \text{ज्याजि}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{द्यु} \times \text{कोज्यावि}}{\text{त्रि}} \times \frac{\text{ज्याजि}}{\text{द्यु}}$$

$= \frac{\text{कोज्याखे} \times \text{ज्याजि}}{\text{द्यु}}$, इयमायनवलनज्या, $\therefore$ $\angle$केस्पच = आयनवलनांशाः ।

तेन $\angle$चस्पके$'$ = स्पष्टवलनांशाः = $\angle$अस्पके, एतत्समा एवापमसमवृत्तोत्पन्नकोणांशाः । अत उपपन्नं सर्वम् ।

(ख) गोलपृष्ठे यद्वृत्तं दृष्टिस्थानगतं न, तद्वृत्तस्पर्शरेखायाः प्रतिभा तु तद्वृत्तप्रतिभायाः स्पर्शरेखा भवति ।

यतोऽत्र परिणाम्यवृत्तपालिगतसूत्राणां तत्स्पर्शरेखाप्रतिबिन्दुगतसूत्राणां च मध्ये स्पर्शबिन्दुगतमेकमेव सूत्रमुभयनिष्ठं, तदेव प्रतिभावृत्तेन स्पर्शरेखाप्रतिभया चैकस्मिन्नेव बिन्दौ मिलितमिति दर्शनात्स्पष्टम् ।

१ यदि परिणाम्यवृत्तं दृक्चिह्नगतं भवेत्तदा तत्प्रतिभा, रेखारूपिण्येव भवति ।

२ गोलस्थमहद्वृत्तस्य प्रतिभावृत्तं यत्तस्य त्रिज्या, गोलत्रिज्यातोऽधिकैव भवति ।

यतः प्रतिभाव्यासदलम् = प्र'व्या'द $= \frac{\text{त्रि} \times \text{त्रि}}{\text{कोज्याइ}} = \text{त्रि}'$

अतः त्रि × त्रि = त्रि$'$ × कोज्याइ, अत्र यतः त्रि > कोज्याइ

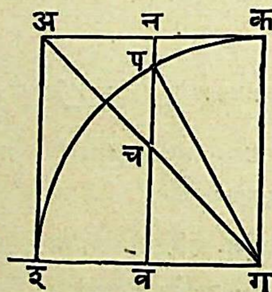
अतः त्रि$'$ > त्रि, इति युक्तियुक्तमुक्तम् ।

३ समानान्तरवृत्तानां प्रतिभावृत्तानि समानान्तराणि भवन्ति।

अत्र केन्द्रान्तरस्यैकत्वात् तेषामेककेन्द्रत्वं, ततः समानान्तरत्वं स्पष्टम्।

४ रेखायाः प्रतिभा रेखानुकारैव, चेत्सा दृष्टिस्थानगता तदा बिन्दुरूपैव भवति।

अथैतत्प्रसङ्गात् पाश्चात्यदेशीय 'आर्कमिडिज्' गणितज्ञनिर्मितो घनफलानयनप्रकारः प्रदर्श्यते।



अत्र इकग = वृत्तपादः। इ, क चापप्रान्तयोः कृताभ्यां स्पर्शरेखाभ्यां इअकग वर्गक्षेत्रमुत्पन्नम्। ततः अग रेखा च कार्या। तदा इ, ग बिन्दू स्थिरौ कृत्वा, इग आधारे परितः 'इअकग' वर्गक्षेत्रभ्रमणेनैकं समतलमस्तकशङ्कुक्षेत्रं जनितम्। तदन्तर्गतवृत्तपादभ्रमणादेकं गोलार्धं, तथा 'इअग' त्रिभुजभ्रमणाद समसूच्येका च समजनि।

अथ वृत्तपादे कुत्रापि 'प' बिन्दौ तत्समतलमस्तकशङ्कुक्षेत्राधारवृत्तस्य समानान्तरभूतलेन तत्क्षेत्रं छिद्यते, तदा, गोलार्ध-समसूची-समतलमस्तकशङ्कुक्षेत्राणामपि छेदनक्षेत्राणि पृथक् वृत्तानि भवन्ति। तत्र मूलक्षेत्रे गप रेखा विधेया नव = छेदकच्छेद्यभूतलयोगरेखा।

$\because$ $\angle$ अगइ = $\angle$ गअइ $\therefore$ $\angle$ गचव = $\angle$ वगच (१।२७) ततः चव = वग
अथ वग^२ + वप^२ = गप^२, वा, वच^२ + वप^२ = वन^२, यतः पगवन, =

$$४वच^२ + ४वप^२ = ४वन^२, \ (२वच)^२ + (२वप)^२ = (२वन)^२$$

∴ 'वच' व्यासार्धोत्पन्नवृत्तक्षेत्रफल + 'वप' व्यासार्धोत्पन्नवृत्तक्षेत्रफल
= 'वन' व्यासार्धोत्पन्नवृत्तक्षेत्रफल। (१२ अ० ३क्षे)

एवं, इक चापस्य प्रतिबिन्दौ समानान्तरभूतलैश्छिन्ने सति एवमेव क्षेत्रफलयोगसम्बन्धः सिद्ध्यति।

तत्र समयोर्योगे समत्वेत्यनेन—

समतलमस्तकशङ्कुक्षेत्रफल = गोलार्धघनफल + सूचीघनफल,

∴ स.त.म.क्षे.फल — सू. घ. फ. = गोलार्धघनफल,

वा, $वृ.क्षे.फ \times त्रि - \frac{वृ.क्षे.फ \times त्रि}{३} = गो\frac{१}{२} घ. फ.$

$$= \frac{२ त्रि \times वृ.क्षे.फ}{३} = \frac{व्यास \times वृ.क्षे.फ}{३}$$

$$∴ गोलघनफलम् = \frac{२ व्यास \times वृत्तक्षेत्रफ}{३} = \frac{व्यास \times वृ.क्षे.फ}{६}$$

इत्युपपन्नं गोलघनफलानयनम्॥

प्रतिभाबोधकमिदं संक्षेपेण कृतं स्फुटम्।
सुधाकरेण, धीमद्भिर्बुद्ध्या ज्ञेयं विशेषतः॥१६॥
शराङ्कसप्तेन्दुशके १७९५ व्यतीते
सुधाकरेणैतदकारि तुष्ट्यै।
यन्त्रप्रचारागमपण्डितानां
श्रीजानकीजानिकृपावलम्बात्॥१७॥

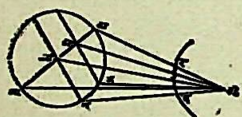
श्रीयुक्ता जानकी जाया यस्य स श्रीजानकीजानिस्तस्य कृपावलम्बात् शेषं सुगमम्।

इति महामहोपाध्यायपण्डितश्रीसुधाकरद्विवेदिविरचिते प्रतिभाबोधके

मैथिलपण्डितश्रीगङ्गाधरमिश्रकृतादर्शतलसंज्ञकतिलकः समाप्तिमगात्॥

प्रतिभाबोधकीयविशेषः—

श्रीरामं सच्चिदानन्दस्वरूपं सत्स्वरूपिणम् ।*
ससीतं शेषसंयुक्तं सदा सेवे सुधाकरः ॥ १ ॥
प्रतिभाबोधके यच्च स्थिरत्रिभुजसंज्ञकम् ।
रेखा तस्य शिरोऽस्त्रार्धकारिणी चाक्षसंज्ञकः ॥ २ ॥



कल्प्यते आकागा स्थिरत्रिभुजम् । काआगा शिरः कोणः । त्रिज्योत्पन्नवृत्ते चरचापमानम् $= \angle$ आ, आकोणार्धकारिणी आजा रेखा ।

आघा काचिदिष्टा रेखा । जा आ घा $= \angle$ य $\therefore \frac{\text{आ}}{२} + \angle$ य $= \angle$ गाआघा ।

$\frac{\text{आ}}{२} - \angle$ य $= \angle$ काआघा

$$\text{अत्रानुपातेन काघा} = \frac{\text{आघा}\left(\frac{\text{आ}}{२} - \angle \text{य}\right)}{\text{ज्या} \angle \text{का}}$$

$$\text{गाघा} = \frac{\text{आघा}\left(\frac{\text{आ}}{२} + \angle \text{य}\right)}{\text{ज्या} \angle \text{गा}}$$

* ग्रन्थकर्त्रैव निर्मितः प्रतिभाबोधकीय विशेष एषः स्वाध्ययनकाले मन्मित्रवरेण ज्यौतिषाचार्यपण्डितश्रीबलदेवमिश्रेण काश्यां गुरुमुखादेवोपलब्धः । कुत्राप्यन्यत्राविदितः तन्मित्रकृपयैव समासादितः विचारणार्होऽयं प्रपञ्चो मया बहादरेण ग्रन्थेऽस्मिन्नेव संस्थापितः येनैष विशेषोऽपि मूलग्रन्थो भूयादिति ।

अनयोर्घातो घाच वर्गसमत्वेन

$$घाच^{2} = \frac{आघा^{2} \times ज्या\left(\frac{आ}{२} - य\right) ज्या\left(\frac{आ}{२} + य\right)}{ज्याका\ ज्यागा}$$

परञ्च $स्प \angle चआघा = \frac{ज्या \angle चआघा}{कोज्या \angle चआघा} = \frac{घाच}{आघा}$

$\therefore स्प^{2} \angle चआघा = \frac{घाच^{2}}{आघा^{2}}$ तेन

$$स्प^{2} \angle चआघा = \frac{आघा^{2}\ ज्या\left(\frac{आ}{२} - य\right) ज्या\left(\frac{आ}{२} + य\right)}{ज्याका \cdot ज्यागा \cdot आघा^{2}}$$

$$= \frac{ज्या\left(\frac{आ}{२} - य\right)\ ज्या\left(\frac{आ}{२} + य\right)}{ज्याका \cdot ज्यागा}$$

$$= \frac{त्रि^{2}\left(ज्या^{2}\frac{आ}{२} - ज्या^{2}य\right)}{ज्याका \cdot ज्यागा}$$

$$एवमेव\ स्प^{2} \angle नआजा = \frac{त्रि^{2} \cdot ज्या^{2}\frac{आ}{२}}{ज्याका \cdot ज्यागा}$$

अत्र स्पर्शवर्गस्वरूपयोर्मध्ये हरगुणकयोस्तुल्यत्वात् केवलं भाज्यस्य चलत्वात् नआजा कोणस्पर्शरेखा, चआघा कोणस्पर्शरेखातोऽधिका सिद्धा ।

अत इष्टस्थानीयकोणादाधाराक्षयोगविन्दौ या पूर्णज्या तदग्रबद्धाभ्यां सूची-शीर्षात् सूत्राभ्यां यत्कोणमानमुत्पद्यते तन्मानमधिकमिति ।

परन्त्वैतत्कोणमानं आकोणार्धादधिकमिति तावत्प्रतिपाद्यते:—

$$स्प^{२}\frac{आ}{२}=\frac{ज्या^{२}\frac{आ}{२}\cdot त्रि^{२}}{कोज्या^{२}\frac{आ}{२}} \quad \ldots \ldots (१) \text{ एवम्}$$

$$स्प^{२}नआजा = \frac{त्रि^{२}\cdot ज्या^{२}\frac{आ}{२}}{का\ ज्या\ ज्या\text{-}गा} \quad \ldots (२)$$

$$\text{तथा } \frac{का+गा-(का-गा)}{२}=गा, \frac{का+गा+(का-गा)}{२}=का$$

$$\therefore ज्याका\text{-}ज्यागा = ज्या\left\{\frac{का+गा+(का-गा)}{२}\right\} ज्या\left\{\frac{का+गा-(का-गा)}{२}\right\}$$

$$=ज्या^{२}\left(\frac{का+गा}{२}\right)-ज्या^{२}\left(\frac{का-गा}{२}\right)$$

$$\text{तथा}९०^{\circ}-\frac{का+गा}{२}=\frac{आ}{२}\ \therefore ९०^{\circ}-\frac{आ}{२}=\frac{का+गा}{२}=को\frac{आ}{२}$$

अतः (२) उत्थापनेन

$$स्प^{२}नआजा = \frac{त्रि^{२}\cdot ज्या^{२}\frac{आ}{२}}{कोज्या^{२}\frac{आ}{२}-ज्या^{२}\left(\frac{का-गा}{२}\right)} \quad \ldots \ldots (३)$$

अत्र (१), (३) स्वरूपयोरवलोकनेनेदं स्फुटं यत् स्वरूपयोर्मध्ये भाज्यस्य स्थिरत्वात् हरस्य चलत्वात् आकोणार्धादपि नआजा कोणमानमधिकमिति । अतः सूत्रावतारः—

आधारवृत्तपरिधिं गता रेखा शिरोऽस्रतः ।
सा च सूचीश्रुतिः प्रोक्ता सूचीक्षेत्रविशारदैः ॥३॥
आधारोभयपार्श्वयोस्समधनुर्जाते श्रुती ये समे
तौ बाहू धनुरग्रगा च धरणी कल्प्याऽत्र पूर्णज्यका ।
एवं त्र्यस्रसहस्रसंभवशिरःकोणेषु सर्वाधिको
ह्याधाराच्च्युतौ तदीयधरणीलग्ना तदस्रोऽस्ति वै ॥४॥
स्थिरत्रिभुजसंज्ञके भवति यः शिरोऽस्रः किल
तदीयदलविन्दुतो ह्युभयदिशि च लम्बौ समौ ।
महत्तमशिरोस्रदलसमौ स्वीयगोले तयो-
र्बहिर्भवति काऽपि न श्रुतिरितीह विज्ञैः स्फुटम् ॥५॥

अथात्र $\frac{\text{आ}}{२}$ कोणस्य समत्वं केन कोणेन भवतीति तावत्प्रदर्श्यते:—

कल्प्यते त्रि = १ तथा

पूर्वसिद्धस्वरूपात् $\dfrac{\text{ज्या}^{२}\dfrac{\text{आ}}{२}}{\text{कोज्या}^{२}\dfrac{\text{आ}}{२}} = \dfrac{\text{ज्या}^{२}\dfrac{\text{आ}}{२} - \text{ज्या}^{२}\text{य}}{\text{ज्याका}\cdot\text{ज्यागा}}$

$$= \dfrac{\text{ज्या}^{२}\dfrac{\text{आ}}{२} - \text{ज्या}^{२}\text{य}}{\text{कोज्या}^{२}\dfrac{\text{आ}}{२} - \dfrac{\text{ज्या}^{२}(\text{का}-\text{गा})}{२}}$$

$$= \dfrac{\text{ज्या}^{२}\dfrac{\text{आ}}{२} - \text{ज्या}^{२}\text{य}}{\text{कोज्या}^{२}\dfrac{\text{आ}}{२} - \text{ज्या}^{२}\text{प}} \quad \text{यदि ज्या}\left(\dfrac{\text{का}-\text{गा}}{२}\right) = \text{ज्याप}$$

$$\therefore \text{ज्या}^2 \frac{\text{आ}}{2}\left(\text{कोज्या}^2 \frac{\text{आ}}{2} - \text{ज्या}^2 \text{प}\right) =$$

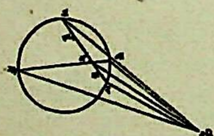
$$\text{कोज्या}^2 \frac{\text{आ}}{2}\left(\text{ज्या}^2 \frac{\text{आ}}{2} - \text{ज्या}^2 \text{य}\right)$$

$$\text{वा} \quad \frac{\text{ज्या}^2\text{प} . \text{ज्या}^2 \frac{\text{आ}}{2}}{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{आ}}{2}} = \text{ज्या}^2 \text{य}$$

$$\therefore \text{ज्याप} \quad \text{स्प} \frac{\text{आ}}{2} = \text{ज्या य}$$

एतच्चापमितकोणान्तरे कोणार्धविन्दुत उभयदिशि ये पूर्णज्ये भविष्यतः तदाधारकोणाभ्यां समः $= \angle \frac{\text{आ}}{2}$, एतेन स्थिरत्रिभुजकोणार्धकारिसूत्रादुभय-दिशि समानकोणोत्पादकसूत्रे आधारे यत्र लग्ने तद्विन्दुस्थतदाधारोपरिलम्बरूप पूर्णज्याधारकत्रिभुजशीर्षलग्नकोणौ समौ भवेताम् ।

आधारवृत्तधरातलीयलम्बमूलगपूर्णज्याधारेषु त्रिभुजेषु स्थिरत्रिभुज-शीर्षलग्नः कोणः परमो भविष्यति ।



तद्यथा लम्बोभयतः कस्या अपि पूर्णज्यायाः खण्डे खं, खं_1, त्रि $= 1$ तदा $\frac{\text{ख}}{\text{ल}} = \text{स्प} \angle \text{शीरख}_1$

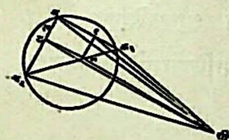
तथा $\text{स्प} \angle \text{चरख}_1 = \frac{\text{ख}_1}{\text{ल}}$

ततः कोदण्डस्पर्शेत्यादिना $\dfrac{\text{खं} + \text{खं}_1}{\text{लं} \dfrac{(1 - \text{खं} \cdot \text{खं}_1)}{\text{लं}^2}} = \text{स्प} (\angle \text{शीरख} + \angle \text{चरख})$

एवम् योस्प' $=\dfrac{\text{खं}_2+\text{खं}_3}{\dfrac{\text{लं}\,(1-\text{खं}_2\text{खं}_3)}{\text{लं}^2}}$ अत्रेदं स्पष्टं यत् सर्वासु कोणयुतिस्पर्शरेखासु हरः

स्थिरः यतः खं $\times$ खं$_1$ = खं$_2$·खं$_3$ = खं$_4$ खं$_5$ (रे ३ । ३५ क्षे·)
भाज्येषु स्थिरत्रिभुजयोगरेखारूपः व्यासः सर्वाभ्यः पूर्णज्याभ्योऽधिकः
तेन बृहत्कर्णलघुकर्णसंभूतकोणः सर्वाधिक इति
आधारवृत्तधारातलीयलम्बमूलेतरविन्दुगपूर्णज्याधारेषु
त्रिभुजेषु तावद्विचार्यते ।

अत्र कक$_2$ काचित्पूर्णज्या यस्या उपरि शीर$_1$ लम्बः तथा शीग आधारधरातलोपरिलम्बः।



ज्या ∠ क$_2$शीर$_1$ = $\dfrac{\text{क}_2\text{र}_1}{\text{शीक}_2}$

तथा ज्या ∠ क$_2$शीग = $\dfrac{\text{क}_2\text{ग}}{\text{शीक}_2}$

∵ ज्या ∠क$_2$शीग > ज्या ∠क$_2$शीर$_1$ पुनः ज्या ∠ र$_1$शीक = $\dfrac{\text{कर}_1}{\text{शीक}}$

ज्या ∠ क$_1$शीग = $\dfrac{\text{क}_1\text{ग}}{\text{शीक}_1}$ ∴ ज्या∠क$_1$शीग > ज्या∠क$_1$शीक

∴ (∠र$_1$शीक + ∠क$_2$शीर$_1$) < (∠ क$_2$शीग + ∠क$_1$शीग)

वा, ∠ क$_2$शीक < ∠क$_2$शीक$_1$

एवमेव ∠क$_1$शीक < ∠ क$_2$शीक$_1$

एवं स्वबुद्धया बहुषु पूर्णज्याधारेषु कोणस्य न्यूनाधिकत्वं प्रदर्शनीयम् ।

अथाऽऽधारवृत्तधरातलीयव्यासरूपाधारेषु सूचीशीर्षगतेषु बहुषु त्रिभुजेषु कस्य शीर्षलग्नः कोणो महान् तद्विचारः प्रदर्श्यते ।

$$\text{व्या}^{२} = \text{क}^{२} + \text{क}'^{२} - २\ \text{क}\ \text{क}'\ \text{कोज्याअ}$$

$$\therefore \text{कोज्याअ} = \frac{\text{क}^{२} + \text{क}'^{२} - \text{व्या}^{२}}{२\ \text{क}\ \text{क}'}$$

$$\text{एवम् कोज्याअ}' = \frac{\text{क}_{२}^{२} + \text{क}_{३}^{२} - \text{व्या}^{२}}{२\ \text{क}_{२}\ \text{क}_{३}} \left\{ \begin{array}{l} \text{अत्रैकाधारत्वात्} \\ \text{क}^{२} + \text{क}'^{२} = \text{क}_{२}^{२} + \text{क}_{३}^{२}\ \text{अतः} \end{array} \right.$$

यदीयकर्णयोर्घातो महान् तत्कोटिज्या लघ्वी ऋणात्मिका धनात्मिका वा । परमत्र (वृक-लक) इदं मानं परमाधिकमतोऽन्तरवर्गोऽप्यधिको भवति

$$\text{तेन}\quad \text{वृक}^{२} + \text{लक}^{२} - २\ \text{वृक} \cdot \text{लक} = \text{अं}^{२}$$

$$\text{एवम्}\ \text{क}^{२} + \text{क}_{१}'^{२} - २\ \text{क}\ \text{क}_{१} = \text{अं}_{१}^{२}$$

$$\begin{array}{l} \therefore \text{वृक}^{२} + \text{लक}^{२} - २\text{वृकलक} > \text{क}^{२} + \text{क}_{२}^{२} - २\text{कक}_{१} \\ \therefore \quad २\ \text{क}\ \text{क}_{१} > २\text{वृक} \cdot \text{लक} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{परञ्चवृक}^{१} + \text{लक}^{२} \\ = \text{क}^{१} + \text{क}_{१}^{२}\ \text{तेन} \end{array} \right.$$

अनेन सिद्धं यदा धनात्मिका कोटिज्या तदा लघुकर्णबृहत्कर्णजातकोणोऽल्पः सर्वेभ्यः तथा समकोणकत्रिभुजशीर्षकोणः परमाधिकः, यदा च कोटिज्या ऋणात्मिका तदाऽन्यथा ज्ञेयम् ।

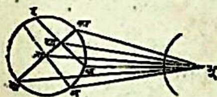
ततः $\text{क} \cdot \text{क}_{१} > \text{लक} \cdot \text{वृक}$ अतः सर्वाधिकतुल्यकर्णयोर्घातस्य महत्वात् फले शून्ये कोज्याआ $= ०$ अतस्तत्र सर्वे शीर्षकोणाः समकोणाः*

---

* आकोणस्य समकोणत्वात् तत्र यानि त्रिभुजानि सर्वत्र भुजकोटी तुल्ये महत्कर्णरूपे तथा कर्णः आधारवृत्तव्यासः एवमत्रैका समसूची जायते यत्र सर्वे शीर्षकोणाः समकोणतुल्याः ।

यावतान्तरेण पूर्णज्याऽऽधारसूचीशीर्षलग्नः कोणः परमः तद्योगरेखाखण्ड-

मानं जाघ=या, गाकें=अ=वृत्तव्यासार्धम् ।



$(\text{अ}+\text{या})(\text{अ}-\text{या}) = \text{घाच}^2 = \text{अ}^2 - \text{या}^2$, अत्र त्रि = १

$\text{भूके} = \text{क}, \quad \angle \text{ भूकेघ} = \text{इ}$

ततस्त्रिकोणमित्या $\text{क}^2 + \text{या}^2 - 2 \text{ याक कोज्याइ} = \text{भूघ}^2$ *

$\therefore \text{भूच}^2 = \text{भूघ}^2 + \text{घच}^2 = \text{क}^2 + \text{या}^2 - 2 \text{ याक कोज्याइ} + \text{अ}^2 - \text{या}^2 = \text{क}^2 + \text{अ}^2 - 2 \text{ याक कोज्याइ}$

$$\therefore \text{ज्या}^2 \angle \text{ चभूघ} = \frac{1 \times \text{घच}^2}{\text{भूच}^2} = \frac{\text{अ}^2 - \text{या}^2}{\text{क}^2 + \text{अ}^2 - 2 \text{याककोज्याइ}}$$

तथा $\angle \text{ चभूघ} = \angle \text{ रभूव}$

यदा कोणज्यावर्गः परमो भविष्यति तदा तदीयतात्कालिकी

गति=० अतः तात्कालिकगतिसिद्धान्तेन

$$0 = \frac{\text{ता}(\text{अ}^2 - \text{या}^2)(\text{क}^2 + \text{अ}^2 - 2 \text{ या ककोज्याइ})}{(\text{क}^2 + \text{अ}^2 - 2 \text{ याक कोज्याइ})^2} - \frac{(\text{क}^2 + \text{अ}^2 - 2 \text{ याक कोज्याइ})(\text{अ}^2 - \text{या}^2)}{(\text{क}^2 + \text{अ}^2 - 2 \text{ याक कोज्याइ}^2)}$$

$$0 = (-2\text{य})(\text{क}^2 + \text{अ}^2 - 2 \text{ याक कोज्याइ}) + 2 \text{ क कोज्याइ}(\text{अ}^2 - \text{या}^2)$$

* भूघा रेखा चभूर कोणार्धकर्त्री इयं चर रेखोपरि लम्बः यतोऽत्र भूच भूर, कर्णौ तुल्यौ । कागा व्यासोपरि लम्बरूपाः याः पूर्णज्याः तदग्रगतौ द्वौ कर्णौ सर्वत्र समानौ यतः सूचीशीर्षात भूविन्दोः आधारधरातलोपरि यो लम्बः तन्मूलात् पूर्णज्याऽग्रगते रेखिके तुल्ये भवतः तथा तयोः रेखयोरुपरि धरातलोपरि लम्बरूपिणीरेखा लम्बरेखा अतः पूर्णज्याऽग्रगतौ कर्णौ तुल्यौ ।

वा, क कोज्याइ $अ^२$—क कोज्याइ $या^२$ + २$या^२$क कोज्याइ—य ($क^२$ + $अ^२$)

वा, क · कोज्याइ · $अ^२$—क · कोज्याइ$या^२$ + २ $या^२$क कोज्याइ-य ($क^२$ + $अ^२$)

पक्षान्तरानयनेन $या^२$क कोज्याइ—य ($क^२$ + $अ^२$) = क कोज्याइ $अ^२$

$$\therefore \text{या}^2 - \text{य} \frac{\text{क}^2 + \text{अ}^2}{\text{क कोज्याइ}} = -\text{अ}^2 \text{ पक्षयोः } \frac{(\text{क}^2 + \text{अ}^2)^2}{४ \text{ क}^2 \text{ कोज्या}^2\text{इ}}$$

$$\text{योजनेन या}^2 - \text{य} \frac{\text{क}^2 + \text{अ}^2}{\text{क कोज्याइ}} + \frac{(\text{क}^2 + \text{अ}^2)^2}{४ \text{ क}^2 \text{ कोज्या}^2\text{इ}}$$

$$= \frac{(\text{क}^2 + \text{अ}^2)^2}{४. \text{क}^2\text{कोज्या}^2\text{इ}} - \text{अ}^2 = \frac{(\text{क}^2 + \text{अ}^2)^2 - ४\text{अ}^2\text{क}^2\text{कोज्या}^2\text{इ}}{४ \text{ क}^2 \text{ कोज्या}^2\text{इ}}$$

$$\frac{(\text{क}^2 + \text{अ}^2 + २ \text{ अक कोज्याइ})(\text{क}^2 + \text{अ}^2 - २ \text{ अक कोज्याइ})}{४ \text{ क}^2 \text{ कोज्या}^2\text{इ}}$$

$$= \frac{\text{बृक}^2 \cdot \text{लक}^2}{४\text{क}^2 \text{ कोज्या}^2\text{इ}}$$ परन्तु भूसम्मुखाश्रोद्धवेत्यादिसूत्रेण

$$\text{बृक}^2 = \text{भूगा}^2 = \text{अ}^2 + \text{क}^2 + २ \text{ अक कोज्याइ}$$

$$\text{तथा लक}^2 = \text{भूका}^2 = \text{अ}^2 + \text{क}^2 - २ \text{ अक कोज्याइ}$$

अतः पक्षयोर्मूलग्रहणेन

$$\text{य} - \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2}{२ \text{ क कोज्याइ}} = \frac{\text{बृक} . \text{लक}}{२\text{ककोज्याइ}}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{बृक} \cdot \text{लक}}{२ \text{ क कोज्याइ}} \text{ यतः अ}^2 + \text{क}^2 = \frac{\text{भूगा}^2 + \text{भूका}^2}{२}$$

$$= \frac{\text{बृक}^2 + \text{लक}^2}{२}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\frac{\text{बृक}^2 + \text{लक}^2}{२} - \text{बृक} \cdot \text{लक}}{२ \text{ क कोज्याइ}}$$

$$= \frac{\text{बृक}^2 + \text{लक}^2 - २ \text{ बृक} . \text{लक}}{४ \text{ क कोज्याइ}} = \frac{(\text{बृक} - \text{लक})^2}{४\text{क कोज्याइ}} \dots\dots (१)$$

अथ स्थिरत्रिभुजशीर्षकोणार्धकारिणी रेखा योगरेखायां कागा रूपायां घ विन्दौ लग्ना तस्माद्विन्दोराधारस्य खण्डद्वयं जातं यन्माने अ−य, अ+य

$$\therefore \text{(रे ६।३)} \ \frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{अ}+\text{य}} = \frac{\text{लक}}{\text{वृक}} \ \therefore \ \text{वृक (अ−य)} = \text{लक (अ+य)}$$

$$\text{वा वृक} \cdot \text{अ} - \text{वृक} \cdot \text{य} = \text{लक} \cdot \text{अ} + \text{लक} \cdot \text{य}$$

$$\therefore \text{वृक} \cdot \text{अ} - \text{लक} \cdot \text{अ} = \text{वृक} \cdot \text{य} + \text{लक} \cdot$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{अ (वृक} \cdot \text{लक)}}{\text{वृक}+\text{लक}} = \frac{\text{अ (वृक−लक)}^2}{\text{वृक}^2-\text{लक}^2}$$

$$= \frac{\text{अ(वृक−लक)}^2}{\text{४ अ क कोज्याइ}} = \frac{\text{(वृक−लक)}^2}{\text{४क कोज्याइ}} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

अत्र (१), (२) अनयोः साम्यं प्रत्यक्षतो दृश्यते तेनेदं सिद्धं यत् परमाधिककोणमानं कोणार्धकारियोगरेखासंयोगस्थलम्बरूपपूर्णज्याऽऽधारत्रिभुजस्यैव भवतीति निर्गलितार्थः ।

---

* श्रीः *

उपसंहारः ।

सुविदित'मिथिला'-देशे 'भागलपुर'-मण्डलान्तःस्थम् ।
भूपितमतिमतिमद्भिश्चयनपुर सद्यशोभिश्च ॥ १ ॥
तत्रास्वाकुलवित्ताश्रयी सुविद्यः सदाचारी ।
शान्तः 'शेखरदत्तो' बभूव मिश्रोपनामकः प्रथितः ॥ २ ॥
तत्तनया मतिमन्तः स्पृहणीयगुणास्त्रयोऽभूवन् ।
ज्येष्ठो महाप्रतिष्ठस्तेषु बुधो 'हंसराजमिश्रो'ऽभूत् ॥ ३ ॥
यावज्जीवनमध्यापननिरतः स्वालये शश्वत् ।
काव्ये स्मृतौ पटीयान् त्रिस्कन्धज्यौतिषे विशेषेण ॥ ४ ॥
काव्यज्यौतिषरत्नतीर्थ-सहिरण्यालंकृति-ज्यौतिषा-
चार्येण प्रतिभाववोधरसिकप्रज्ञावतां प्रीतये ।
कृत्वाऽऽदर्शतलाभिधं सुतिलक तत्सूनुना यत्नतः
श्रीगङ्गाधरमिश्रमैथिलविदा संमुद्य तत्स्वस्त्वतः ॥ ५ ॥
तस्य श्रीमति पादपद्मयुगले भक्त्याऽर्पितं योऽधुना
काश्यां टीकमणीतिसंज्ञलसिते विद्यालयेऽध्यापकः ।
'गेनालाल' इतिस्वनामविदितः पूर्णात्मसर्वाशय-
श्छात्राज्ञानतमोहरोगुरुवरोऽस्ति ज्यौतिषे कल्पकः ॥ ६ ॥
यन्नामश्रवणादवाप्तगुरुतावेशो न को दैववित्
यद्विद्यागुरुतां विभाव्य सहसा के न स्तुवन्तीह तम् ।
लोकाडम्बरवस्तुवस्त्रविरमः प्राप्तेऽपि योग्ये धने
त्यागी धार्मिकधोरधीर्विजयते श्रीमान् मदीयो गुरुः ॥ ७ ॥

मोहात्कण्टकदोषाद्वाऽशुद्धयो जनिता हि याः ।
शोधनीया गोलविज्ञैर्भूय इत्येवमर्थये ॥